CAROLI
RENALDINII
SERENISSIMI COSMI TERTII
MAGNI ETRVRIÆ DVCIS
Philoſophi, ac Mathematici,
ET IN PATAVINO LYCEO PHILOSOPHI
Primæ Sedis.

GEOMETRA
PROMOTVS
EIDEM SERENISS. MAGNO DVCI
D.



PATAVII, MDCLXX.

Typis Petri Mariæ Frambotti Bibliopolæ.
SVPERIORVM PERMISSV.

Digitized by Google

CAROLI RENARDINII
IN SVVM
PROMOTVM GEOMETRAM
Præfatio.

TRactationem illam ad extremum aggredimur, in qua de Vnitate, quatenus in Geometria quidem uſum habere poteſt, nobis eſt diſſerendum. Hanc autem prouinciam nos aliquandò ſuſcepturos eſſe, non ſemel polliciti ſumus. Res magni momenti eſt; ita nimirum vt facilè mihi ſuaſerim, Geometram aliunde tàm magnas ſuppetias ad veritatem indagandam deſumere non poſse; præſertim in concinnandis demonſtrationibus, difficilimarum Effectionum, quas Analyſta didicit ab Arte ſua.

Proponitur agendum de vſu Vnitatis in rebus Geometricis.
Magna iſtius vſus vtilitas.

At verò duo videbantur eſſe, de quibus erat operæ pretium Artificem eſſe magnòperè ſollicitum. Vnum Geometrica Effectio: Alterum eiuſdem Demonſtratio; Illud quidem; nam tametſi ritè fuerit Analyſis ordinata, & inde Poriſma deductum; niſi tamen præſto ſit modus, quo quidem ad oblati Problematis reſolutionem conducente, perficiatur Effectio, nihil actum videtur; cùm potiùs analyticum laborem illum pertuliſſe, ſit oleum, ac operam perdidiſſe. Erat propterea, cur quàm plurimas Lineas qualiſcunque nobis illas dictauerit ſolertia, perquireremus, vt ijs videlicet opitulantibus; datum nobis foret in arenam deſcendere, nè Problematum illorum, quorum difficultas Veterum torſit ingenia, nobis negotij quicquam faceſſeret; ſed potiùs ea meditatione perſequi, & reſoluenda ſuſcipere, nullius ferè laboris foret; cùm alioquin ijs olim ſatisfacere, nemini Mortalium licere, niſi conſulto quidem Oraculo, crederetur.

Duo ſunt, de quibus oportet Analyſtam eſſe ſollicitum.
Effectio Geometrica, eiuſque demonſtratio.

Alterum, quod quam maximè, videbatur in votis, quædam erat diſſerendi ratio, qua non fortuitò Effectionem ipſam, dictante Poriſmate, demonſtraremus, non Arabum via ſalebroſa, ac ardua, ſed Regia quidem Euclidis incedentes; quod, etſi citra puluerem fieri poſſe cuilibet fateri neceſſe ſit, cùm ſcilicet in ipſa peragenda reſolutione, nullus ad ſolida, & multò minus ad imaginarias quantitates ſit aſcenſus; quam ſæpiſsimè tamen exigui laboris non eſt, comparatam iam Effectionem Euclideo more demonſtrare. Nos autem neceſsitate quadem adacti, noſtras eſſe partes credidimus, hunc ſupplere Artis defectum; vt hac nimirum ſic locupletata, Veterum Analyſtarum neminem poſthac nos admirari debeamus:

Olim ijs credebatur impoſſibile Problematibus ſatisfacere, quæ Auctor reſoluenda ſuſcipit.
Quando non fit aſcenſus ſupra plana, nullius laboris eſt Problemata reſoluere.

quod ſi fortaſsis perſpectum ijs fuiſſet, non tàm auidè ſua, de induſtria, perquiſitionis veſtigia, occultaſsent; quaſi Poſteris inuidentes hanc Artem indagatricem, ſuis verbis ab ijs extorquere vellent aſſenſum. Antiquis tamen habendæ ſunt gratiæ non vulgares, quòd eouſque nobis artificioſam illam indagandi rationem ſuppreſserint, vt coegerint nos ad nouam hanc proprio Marte parandam: de qua non iniuria præſens ætas gloriari poſsit.

Huius tractationis argumentum.

Hæc autem vniuerſa, quàm præ manibus habemus, Tractatio docet, quâ ratione per Analogiſmum omnia Poteſtatum genera, facto initio à Quadrato, Vnitatis præſidio, in ſimplicisſimas longitudines reſoluantur. Hunc itaque in modum, nedum Poteſtates ipſæ, verum etiam & ijs homogenea tractantur, non ſecùs ac ſi longitudines forent: vnde demonſtratio omnis per longitudines ipſas procedit; ac proinde quamuis Analyſis ad ſolida, quinimmò ad imaginarias quantitates aſcenderit, & per earum æqualitatem proceſserit, adhuc tamen noſtra hac, quam ſubijcimus, Methodo, licet eiuſdem Analyſeos veſtigia repetere, ad demonſtrationes contexendas, tàm ſolidis, quàm altioris ordinis quantitatibus neglectis, vt non minus Geometrica Effectio, quàm eiuſdem legitima demonſtratio ſit obuia. Opus quidem hactenus inacceſsum, magnoperè tamen exoptatum; non enim Artifici parum erat dedecori, hinc non demonſtrationem, ſed Effectionem ipſam attendere. Quantum porrò Veteres Analyſtæ peccaſſent in Arte, non erit operoſum intelligere ex ijs, quæ proprio Marte, haud Muſis inuitis, adinuenimus.

Auctoris Methodus magnam habet vtilitatem adiunctam.

Primum igitur de Geometricis Effectionibus agendum: poſtmodum autem de contexendis demonſtrationibus Vnitatis præſidio diſputandum: deinde hæc eadem exemplis illuſtranda ſunt; Tandem Appendicem de Maximis, & Minimis ſubijciemus, in qua vniuerſalem, generalemque demonſtrandi formam, perquiſitioniſque modum afferemus; Quamuis enim Veteres, non ſine magno virtutis ſplendore, nominiſque celebritate, hac de re Lucubrationes ediderint, tamen nullâ id lege factum ab ipſis iure dixeris; quicquid enim ſunt, de Maximis, & Minimis tractantes, meditati, caſu potiùs, quàm Artificioſa diſſerendi ratione præſtitiſſe, uidentur. Recentiores contra ad præcepta induſtrioſè admodum omnia redigentes, Artem reſolutricem, non ſine magno Reipublicæ Litterariæ commodo, ac utilitate auxerunt. Hæc igitur huius Tractationis ſumma eſto. Supereſt, ut hic Lectorem certiorem faciamus, nobis in animo quidem eſse, hac methodo beneficio Vnitatis abſoluta, generalem quandam reſoluendi, componendique normam tradere, atque docere; non quaſi innumera Problemata, alijs Methodis, reſolui non poſse exiſtimemus (quod non fuit prorſus abs re animaduertiſse) ſed quia eo ſaltem nomine hæc ceteris præferenda uidetur, quòd ad infinita, eaque difficilima reſoluenda Problemata conducit, quibus, vnica quauis reliquarum opitulatione obuiam ire non licet.

Tractandorum ordo.

Apendix de Maximis, & Minimis ad calcem huius Tractatus differtur.

Recentiorum Methodus pro Maximis, & Minimis indagandis maximè commendabilis.

Huius Methodi excellentia, atque præſtantia.

DE GEOMETRICIS EFFECTIONIBVS.

Effectio Naturæ ordine demonſtrationem præcedit; quamobrem primùm hic de ipſa diſſerendum.

Eſt autem Effectio in Analyticis operatio à Poriſmate præſcripta; cùm enim in omni Problemate ſit aliquid nobis operandum, & quid operandum ſit Poriſma præſcribat; hoc ipſum eſt quod effectionem appellant. Cùm autem dicimus, in quouis Problemate aliquid nobis operandum eſſe, ac illud à Poriſmate præſcribi, ſano id modo intelligendum, vt ſuo loco monuimus; nam re vera nihil eſt, quod operamur, ſed per hunc loquendi modum ſignificamus ortum, ſeu geneſin, vel alicuius diuiſionis, additionis, vel alicuius figuræ, vel alicuius proportionis &c. nihil eſt, inquam, quod operamur; haud enim conceſſum eſt nobis lineam ducere, figuras deſcribere &c. niſi intellectu, ac imaginatione; At ſi id, quod nobis imaginari licet, aliquid à nobis operabile dicendum erit, tunc dicemur aliquid operari, cum aliquid, quod in re non eſt, imaginatione effingimus. Num verò id ritè ſit dictum, penes te iudicium eſto. Superiùs enim aduertimus, nec Arithmeticam, nec Geometriam &c. eſſe de re operabili, ſi res operabilis accipiatur iuxtà communem vſum loquendi; quod ſi ſumatur pro omni eo, quod nos operari valeamus, etſi tantummodò actibus intellectus, ſic eſſent de re operabili; vnde lineam ducere, circulum deſcribere, cæteraque perficere, quæ in huiuſmodi Diſciplinis locum habent, hoc ſenſu erit operari; ac ob id cognitio, quæ de his eſt, ſi circa hæc ipſa verſetur operabili modo, præſcribendo ſcilicet præcepta, ac regulas, quibus nos actibus mentis lineam imaginatione deſcriptam, hoc, vel illo modo diuidere valeamus, & alia conſimilia conficere poſsimus, practica dicetur; at quæ in ſola veritatis indagatione ſiſtit, nec nobis inſeruire poteſt ad hoc, vel illud, nec etiam actibus mentis operandum, in magnitudinibus, numeris &c. cõtẽplatiua nũcupabitur. Effectio igitur, de qua loquimur, eo ſenſu eſt vſurpanda, quo in his, & conſimilibus aliquid à nobis effici dici poteſt.

Effectio quid ſit in Analyticis.

Quo ſenſu Mathematica de re operabili dici poſſint, & qua ratione practica.

Ad hanc igitur Effectionem quod attinet, reuocandum eſt in memoriam, quod ſuo loco non ſemel à nobis inculcatum fuit, nimirum omnia linearum genera adhiberi poſſe; cùm omninò à veritate alienum arbitraremur, Geometram tantummodò circulo, lineaque recta vti poſſe; id enim intollerabile duximus; quamobrem liberum exiſtimamus Geometræ quodcunque lineæ genus aſſumere, cuius natura ad oblati Problematis effectionem conducit.

Omne linearum genus in Effectionibus adhiberi poteſt.

Non ſolum igitur lineam circularum, cum linea recta, ſed omnes ſectiones conicas, nimirùm lineas, Parabolicam, Hyperbolicam, & Ellipticam; præterea Concoideam, Cycloideam &c. de quibus initio multa diximus, adhiberi poſſe cenſemus. His autem adijcimus illas, quas Mediceas dicebamus. Solertia igitur Artificis erit oblati Problematis naturam introſpicere, ac diligenter attendere, quod nam ſit lineæ genus, ad optatam Effectionem conducens; nam quæcunque illa extiterit, ea eſt adhibenda; in quo tantùm illud eſt obſeruandum, vt ſi plures lineæ propoſito ſatisfaciant, ea ſeligatur, quæ minus compoſita eſt; vnde ſi Problemati ſatisfacere licet præſidio lineæ circularis cum linea recta, cauendum à lineis magis compoſitis, vt à parabolica, hyperbolica, &c.

In quo potiſſimum; Artificis ſolertia poſita ſit.

Sed vt in arenam deſcendamus; primum occurrit conſiderandus modus, quo alij Problemata, quæ ſolida dicuntur, conſtruere conſueuerunt; omnia enim problemata, quorum Effectio lineam magis compoſitam, quam circularem requirit, ſolida nuncuparunt; Sed nos antiquâ retentâ partitione Problematum, in Plana, Solida, & Linearia, procedimus, contendentes, ijs Problematibus, quorum conſtructio, ſiue Effectio, neque per circulum, neque per conicas ſectiones haberi poteſt, per alias lineas, tùm antiquas, tùm à nobis excogitatas, quæ tamen, vtpote communiſsimæ, omnibus Problematibus inſeruiunt, plenè, ac planè ſatisfacere.

Primò conſiderandus modus, quo problemata ſolida conſtruxerunt.

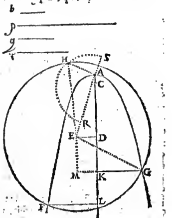
Erat autem ſubſequens modus, quo Carteſius vtebatur, ad conſtruenda Problemata ſolida.

Problemata ſolida ad æquationes trium, vel quatuor dimenſionum reuocata Carteſius, ad eum qui ſequitur modum, conſtruxit.

Conicæ ſectiones præcipuè verò ea, quæ Parabole dicitur, ſuppeditat nobis vſam ad conſtruenda Problemata ſolida, quæ ad æquationem trium, vel quatuor dimenſionum redacta fuere.

Id autem, vt aſſequamur, iuuabit ſecundum æquationis terminum de medio tollere, ſi nimirum adſit obſeruatis præceptis iam ſupra traditis; atque adeò oportebit æquationem ad hanc formam redigere $u^3 = * \, b\,p\,u;\ b^2 q$, quando nimirum incognita quantitas tres tantummodò dimenſiones habeat.

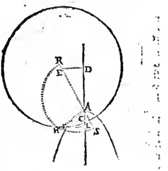
Vel ad hanc reducetur $u^4 = * \, b\,p\,u^2;\ b^2 q\,u;\ b^3 r$; ſi videlicet ignorata quantitas quatuor dimenſiones habuerit; cumque b, ſumi poſsit vnitatis loco, proindè prior illa reducetur ad hanc $u^3 = * \, p\,u,\ q$; Secunda verò verò ad iſtam $u^4 = * \, p\,u^2,\ q\,u,\ r$.



Supponamus Parabolen F A G, iam eſſe deſcriptam; (utimur demonſtratione Carteſij, rectè concludente) eius autem axis ſit A C D K L. Sit autem recta iuxta quam poſſunt ordinatim applicatæ, ſiue latus rectum B (quid autem ſit latus rectum Paraboles patet ex Apollonio); illud verò ſtatuendum eſt b, vel 1; ſit porrò dimidium ipſius A C. Punctum autem C ſit intra Parabolen, cuius vertex ſit A. Oportet autem facere $CD = \frac{1}{2}p$, quæ ſumenda eſt in recta A C, continuata verſus C, quando nimirùm in æquatione habeatur $+p$, verſus tamen alteram partem, ſi adſit $-p$. E puncto autem D, vel ex puncto C, cum non habetur quantitas p, erigatur a axem perpendicularis D E, æqualis $\frac{1}{2}q$; deinde centro E, deſcribatur circulus F G, cuius ſemidiameter ſit A E, non intercedente quantitate r. Quòd ſi hæc interceſſerit vtrinque (ſi tamen ſigno + afficiatur) producatur vlterius, & in hac linea A E, hoc pacto vtrinque producta ſumatur ex vna parte $AR = r$,

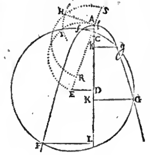
Vide primam figuram.

ex altera verò A S, quæ ſit æqualis lateri recto Paraboles; quod quidem ſupponimus eſſe 1. Deſcribatur verò circulus, cuius diameter R S, & erigatur A H, perpendicularis ad A E, occurrens huic circulo in H, puncto per quod circulus alter F H G, tranſire debet. At verò ſi quantitas r, afficeretur ſigno −; oporteret in alio circulo, cuius diameter A E; oporteret, inquam, inſcribere A I, æqualem inuentæ A H, & per punctum inuentum I, primus ille circulus F I G, tranſire debet, primus, inquam, circulus quæſitus.



Oportet autem animaduertere ab hoc circulo ſecari, vel tangi poſſe Parabolen in vno, vel duobus, tribus, vel quatuor punctis, à quibus nimirùm, ſi ad axem demittantur lineæ perpendiculares, habebuntur omnes æquationis

radices tàm veræ, quàm falſæ. Itaque ſi quantitas, quæ ponebatur q, affecta ſit ſigno +, radices veræ erunt illæ ex his perpendicularibus, quæ nimirum ex eadem parte Paraboles, qua eſt E, circuli centrum, reperientur, quemadmodum FL, reliquæ autem, vt GK, falſæ erunt. Contra verò ſi quantitas q, prædicta affecta fuerit ſigno −, illæ quidem veræ erunt, quæ ex altera ſunt parte, falſæ autem, quæ ex parte illa, vbi centrum E, reperitur. Quod ſi eueniat vt circulus hic, neque ſecet, neque tangat parabolen in aliquo puncto, id planè argumento erit æquationem nullam radicem admittere, neque veram, neque falſam, ſed tantùm imaginarias.



Supponamus autem GK, inuentam eſſe, radicem quæſitam u; AK, erit u^2; ſiquidem GK in Parabola, medio loco proportionalis eſt inter AK, & latus rectum; cumque latus rectum ſit 1, ſequitur AK, eſſe u^2. Si verò ab AK, auferatur AC, quæ eſt $\frac{1}{2}$, cum ſit dimidium lateris recti, vt, & CD, quæ eſt $\frac{1}{2}p$, remanebit DK, ſiue EM; $u^2 - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}$, huius autem quadratum eſt $u^4 - pu^2 - u^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$; erat autem DE, ſiue KM; $\frac{1}{2}q$; Quamobrem tota GM, erit $u + \frac{1}{2}q$; cuius quadratum eſt $u^2 + qu + \frac{1}{4}q^2$ duobus autem additis hiſce quadratis, & fiet $u^4 - pu^2 + qu + \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$, pro quadrato ipſius rectæ GE, quæ nimirùm eſt baſis trianguli rectanguli EMG.

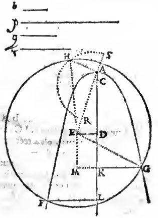
$$
\begin{array}{r}
u^2 - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2} \\
u^2 - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2} \\
\hline
-\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{4}p + \frac{1}{4} \\
-\frac{1}{2}pu^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}p \\
u^4 - \frac{1}{2}pu^2 - \frac{1}{2}u^2 \\
\hline
u^4 - pu^2 - u^2 - \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} \\
\\
u^4 - pu^2 - u^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} \\
u^2 + qu + \frac{1}{4}q^2 \\
\hline
u^4 - +u^2 + qu + \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}
\end{array}
$$

Cum autem hæc eadem linea GE, ſit circuli FG, ſemidiameter, erit etiam alijs modis explicabilis. Si igitur ED fuerit $\frac{1}{2}q$, & AD, $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}$, certè EA, erit, ℞$(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4})$ eo quia triangulum illud ſit rectangulum, cuius rectus angulus eſt ADE. Cum autem AH, ſit media proportionalis, inter rectam AS, poſitam æqualem lateri recto, quod eſſe 1, dicebamus, & rectam AR, quæ eſt r; proindè AH erit ℞ r, quia verò angulus EAH rectus eſt: quadratum ex EH, ſiue EG erit, $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} + r$, erit igitur æquatio huiuſmodi

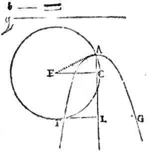
$$\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} + r = u^4 - pu^2 + qu + \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4},$$

Et per Antitheſin in $u^4 = * + pu^2 - qu + r$

Huius igitur æquationis radix erit GK, quæ ponebatur u.

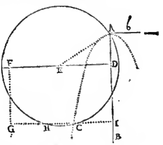


Præſidio huius parabolicæ ſectionis inter duas datas rectas lineas haud eſt difficile duas alias medio loco proportionales adinuenire. Supponamus itaque datas eſſe rectas b,q, inter quas operæ pretium ſit reperire duas rectas medio loco proportionales in proportione continua. Dicamus vnam eſſe u, erit autem vt b, ad u, ita u, ad $\frac{u^2}{b}$, & vt u, ad $\frac{u^2}{b}$, ita $\frac{u^2}{b}$ ad $\frac{u^3}{bb}$; quamobrem æquatio fiet huiuſmodi $\frac{u^3}{bb} = q$, nempe $u^3 = * b^2 q$; modo verò deſcribatur Parabole F A G, & ex eius axe ſumatur ſegmentum A C; quod æquale ſit dimidio lateris recti eiuſdem Paraboles, quod cum diceremus eſſe 1, prædictum ſegmentum erit $\frac{1}{2}$. Erigatur ex puncto C perpendicularis C E, quæ æqualis fiat dimidio iam datæ q; & centro E, per A, deſcripto circulo A F, innoteſcent F L, L A, mediæ quæſitæ.



Cùm autem Carteſius omiſerit demonſtrationem, qua ſcilicet oſtendatur, quatuor lineas b, L F, L A, & q, continuè proportionales eſſe; proinde non erit abs re, id quàm breuiter, perſpicuèque demonſtrare, ſed hæc etiam ſupra demonſtrata ſunt.

Sit Parabole A C, cuius axis ſit A B, vertex autem A, latus rectum ſit b, cuius dimidio fiat æquale ſegmentum A D, ex quo puncto agatur D E, quæ ſit dimidia datæ rectæ q, inter quam & b, oporteat reperire duas medias proportionales; Deinde centro E, interuallo verò E A, deſcribatur circulus ſecans axem A B in K, & ſectionem ipſam in C; modò protracta D E, vlterius vſque ad peripheriam circuli, & per punctum C, ducatur recta parallela ipſi D E, quæ ſit C H, at verò fiat E F, æqualis ipſi E D, cadat ex puncto F, recta F G, ad rectos angulos cum F D, ac proindè parallela rectæ D B, occurrens lineæ C H, protractæ in G; hæc verò ex alia parte protrahatur occurrens rectæ AB, in I. Dico C I, I A, duas medias eſſe proportionales inter b, & q. Quoniam enim C I, eſt ſemiordinatim applicata, erit rectangulum ſub b, & A I, æquale quadrato ex C I, conſtat ex Apollonio 1. lib. Coni. vt igitur b, ad C I, ita C I, ad I A; at verò G I, æqualis eſt F D, & F D, æqualis eſt q, ex conſtructione, ergo rectangulum comprehenſum ſub G I, & I C, idem erit quod ſub q, & C I; ſed rectangulum G I C, ſiue ſub G I, & I C, æquale eſt quadrato ex I A, ergo rectangulum ſub C I, & q, æquabitur quadrato ex I A; quamobrem erit, vt C I, ad I A, ita I A, ad q, itaque quatuor proportionales erunt b, C I, I A, & q.



Quod autem rectangulum G I C, æquale ſit quadrato ex I A, demonſtratur; quadratum enim ex I A, æquale eſt a rectangulo A I K, plus rectangulo I A K, ſed rectangulum A I k, æquale eſt rectangulo H I C, ergo quadratum ex I A, æquabitur rectangulo HIC, plus rectangulo I A k, ſed rectangulum I A k, æquale eſt quadrato ex C I, ob naturam Paraboles; ſiquidem A K, æquatur b, lateri recto eiuſdem, ergo quadratum ex I A, æquale erit rectangulo H I C, plus quadrato ex C I, hoc eſt ex G H, ſed rectangulum HIC, plus quadrato ex G H, æquale eſt rectangulo G I C, ergo rectangulum G I C, æquale erit quadrato ex A I, rectè igitur dicebamus eſſe continuè proportionales b, C I, I A, & q; Quod oſtendere oportebat.

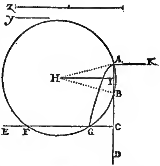
a 2. ſecundi.

Hinc

Digitized by Google

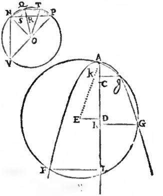
Hinc liquet illud idem, quod lib. 2. de Reſolutione, & Compoſitione oſtendimus &c.

HIc enim nil aliud colligitur, quàm quod ſuperiori demonſtratione conſecuti ſumus, licet in ipſa demonſtrandi forma diſcrimen aliquod tyroni videri poſſet.



Dicebamus enim. Quoniam rectangulum FCG æquale eſt rectangulo ACB; vtrinque addito quadrato GC; ergo rectangulum FCG, plus quadrato GC, hoc eſt rectangulum ECG, æquabitur rectangulo ACB, plus quadrato GC; ſed quadrato GC æquale eſt rectangulum CAB, ob parabolen; (eſt enim AB æqualis AK lateri recto) ergo rectangulum ECG, æquabitur rectangulo ACB, plus rectangulo CAB; ſed rectangulum ACB, plus rectangulo CAB, eſt æquale quadrato AC; ergo rectangulum ECG, æquabitur quadrato AC; ergo vt EC, ad AC, ita AC, ad CG; ſed vt AC, ad CG, ita CG, ad AB, ob parabolen, cùm rectangulum BAC, hoc eſt ſub AK latere recto, & axe AC, æquale ſit quadrato CG; ergo vt EC, ad AC, ita AC, ad CG, & vt AC, ad CG, ita CG, ad AB; ergo inter duas EC, AB, duæ quidem AC, CG mediæ continuè proportionales inuentæ ſunt. At verò EC eſt ex conſtructione æqualis Z, & AB æqualis Y; ergo inter duas datas Z, Y, duas adinuenimus medias proportionales AC, CG, in continua ratione.

Quod facere propoſitum erat. Vides igitur hanc demonſtrationem à ſuperiori verbis tantùm differre.



HInc etiam patebit anguli rectilinei triſectio. Sit igitur angulus rectilineus NOP; diuidendus trifariam, ſiuè arcus NQTP, diuidendus ſit in tres partes æquales; Sumatur NO, æqualis 1, pro radio circuli, & NP, æqualis q, pro ſubtenſa dati arcus, atque NQ, æqualis u, pro ſubtenſa trientis eiuſdem arcus, erit vt NO, ad NQ, ita NQ, ad QR, & ita QR, ad RS; ducta nimirùm QS, parallela ipſi TO; ductis autem NQ, OQ, & OT, & cùm ON, idem quod 1, & NQ, ſupponatur u, QR, erit u^2, & RS, erit u^3, vnde conſurget æquatio $u^3 = * \, 3u - q$; Et quia RS, ſeù u^3 impedit quo minus NP, ſit tripla ipſius lineæ NQ, quæ nimirum eſt u; conſurget æquatio proindè huiuſmodi, $q = 3u - u^3$, Vel $u^3 = * \, 3u - q$.

Quod autem ſint quatuor proportionales ON, NQ, QR, RS, patet; nam triangulum ONQ, ſimile eſt triangulo NQR; ſiquidem angulus ad Q, communis eſt; & angulus QNR, hoc eſt QNP, eſt inſiſtens arcui QP, cui inſiſtit QOP, cuius dimidium QOT, ſeù NOQ; quarè NOQ, æquabitur QNR; ac proindè triangula erunt ſimilia, ergo vt ON, ad NQ, ità NQ ad QR; & quia triangulum QRS, ſimile eſt triangulo NQR; angulus enim ad R, eſt communis; anguli, QOT, ſeu QON, hoc eſt QNR, & SQR ſunt inter ſe æquales, ergo, & reliquus QSR æquabitur reliquo NQR; quare triangula erunt æquiangula, atque adeò ſimilia; ſcil. triangulum SRQ, ſimile erit triangulo NQR; proindè, vt NQ, ad QR, ita QR, ad RS; ſunt igitur proportionales ON, NQ, QR, RS; Quod oportebat oſtendere.

Digitized by Google

Totum autem iſtius Artis opus in eo poſitum eſt, vt æquationes propoſitæ ad vnam ex his formulis reducantur, videlicet.

$$u^3 = * - p\,u + q$$
$$u^3 = * + p\,u + q$$
$$u^3 = * + p\,u - q$$

Hac enim reductione facta citrà laborem, licebit radicem extrahere iuxtà præcepta elapſis temporibus inuenta, & nunc à nobis explicata.

Si igitur ſit æquatio prima $u^3 = * - p\,u + q$, hæc methodus obſeruari debet. Sumatur $+\frac{1}{2}q$, illudque ſeruetur, mox autem accipiatur $\frac{1}{4}q^2$, cui addatur $\frac{1}{27}p^3$, & ex aggregato extrahatur latus quadratum, illudque addatur ipſi $+\frac{1}{2}q$, ſuperius ſeruato: ex toto hoc autem aggregato, ſumatur latus cubicum, cui ſubducatur latus cubicum huius reſidui, nempe ſumatur $\text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)$; ex hoc autem latere ſubtrahatur $\frac{1}{2}q$, ita vt fiat $-\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)$; huius porrò reſidui latus cubicum erit $\text{℞c}(-\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3))$ factaque ſubtractione, vt dictum eſt, futura eſt radix, vt hic vides,

$$\text{℞c}(+\tfrac{1}{2}q + \text{℞}(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)) - \text{℞c}(-\tfrac{1}{2}q + \text{℞}(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3))$$

Hæc autem iuuabit numeris explicare. Sit æquatio huiuſmodi.

$$1\,c + 72\,R = 1720$$
$$u^3 \quad\; p \quad\; q$$

Huius æquationis radix erit.

$\text{℞c}(+860 + \text{℞}(739600 + 13824)) - \text{℞c}(-860 + \text{℞}(739600 + 13824))$

Hoc eſt $\text{℞c}(+860 + \text{℞}753424) - \text{℞c}(-860 + \text{℞}753424)$

Hoc eſt $\text{℞c}(+860 + 868) - \text{℞c}(-860 + 868)$

Hoc eſt $\text{℞c}\,1728 - \text{℞c}\,8$

Hoc eſt $12 - 2$, Hoc eſt 10, & ita 10 erit radix propoſitæ æquationis.

Huius autem methodi demonſtratio ſic ſe habet.



Supponamus A B, æquari u, eſt autem u, radix ſuperioris æquationis, quæ quidem ſupponitur valere 10, adeò vt A C, æquetur huic nempe $\text{℞c}(+\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3))$. Si igitur accipiatur reſiduum iſtud ideſt $\text{℞c}(-\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3))$ æquale nimirum lineæ B C, eorum differentia erit $\text{℞c}(+\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)) - \text{℞c}(-\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3))$, & quidem æqualis erit hæc differentia ipſi A B. Si verò ſtatuamus A B, æquari u, differentia cuborum ex prædictis radicibus, nempè differentia inter $\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)$ nempè cubum ex $\text{℞c}(+\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3))$, & hunc ſcilicet $-\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)$ cubum ſcilicet ex $-\text{℞c}(-\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3))$ erit inquam iſtorum cuborum differentia æqualis q, vt patet ex opere multiplicationis.

Erit igitur q, differentia inter cubum lineæ A C, & cubum lineæ B C. Cubus autem ex A B; atque triplum productum rectarum A C, B C, A B, ſimul æquantur eidem differentiæ q; quandoquidem cubus ex AB;

Cubus	$+\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)$ ex A C $= 12$
Cubus	$-\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)$ ex B C $= 2$
	q Differentia cuborum ſupradictorum

plus cubo, ex B C, plus triplo producto rectarum A C, B C, A B, ſimul æquatur cubo lineæ A C. Vt enim q, eſt differentia inter illos duos cubos $+\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)$ & $-\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)$ ità cubus ex A B, plus triplo producto rectarum A C, B C, A B, ſimul; proindè cubus ex A B, plus triplo producto, rectarum A C, B C, A B, æquabitur q. Proindè u^3, nempe cubus ex A B, vna cum triplo producto linearum A C, BC, A B, æquabitur q. Illud autem triplum productum comparabitur ſi multiplicemus binomium $\text{℞c}(+\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3))$ æquale rectæ A C, per reſiduum $\text{℞c}(-\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3))$ æquale rectæ B C. At verò inſtituta multiplicatione, vt vides ex $\text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)$ in ſe, fit certè $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$. Inſuper ex $+\frac{1}{2}q$, in $-\frac{1}{2}q$, fit $-\frac{1}{4}q^2$; Si igitur ad iſtud $+\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$, addatur $-\frac{1}{4}q^2$, fit ſumma $+\frac{1}{27}p^3$; Etenim $+$, & $-$, in additione ſubtrahuntur;

Producta

Producta verò facta ex $+\frac{1}{2}q$, & $-\frac{1}{2}q$ in Radicem illam nimirùm $\text{℞}(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)$; quoniam vnum euadit affectum ſigno †, alterum verò ſigno --; proindè ſe mutuò deſtruunt; quamodrē ſi ducatur $\text{℞}c(\dagger\frac{1}{2}q\dagger\text{℞}(\frac{1}{4}q^2\dagger\frac{1}{27}p^3))$ in hāc nimirùm $\text{℞}c(-\frac{1}{2}q+\text{℞}(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3))$; fiet productū $\text{℞}c(\frac{1}{27}p^3)$ ſeu $\frac{1}{3}p$, nempè radix cubica ipſius $\frac{1}{27}p^3$; fit autem illud productum $\text{℞}c(\frac{1}{27}p^3)$; quoniam radices cubicæ ligatæ fuerunt multiplicatę; proindè etiam productū debet eſſe tale, nempè radix ligata &c. triplum autem productum (erat enim inæquatione plus triplo producto rectarum AC, BC, AB), erit quidem p, hoc autem ſi multiplicetur per u; quoniam productum ex AC, in BC, fuit ductum in A B; proindè fiet p u; quamobrem u^3+pu, æquabitur q, vel u^3, æquabitur $-pu+q$, veldemum $u^3+pu-q=0$.

$$\begin{array}{r} \text{℞}c(+\frac{1}{2}q+\text{℞}(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)) \\ \text{℞}c(-\frac{1}{2}q+\text{℞}(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)) \\ \hline +\text{℞}c(\ldots\ldots\ldots)+\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3 \\ -\text{℞}c(\ldots\ldots\ldots)-\frac{1}{4}q^2 \\ \hline \frac{1}{27}p^3 \\ \text{℞}c\,\frac{1}{27}p^3 \\ \text{ſeù}\ \frac{1}{3}p^3 \end{array}$$

Superius à nobis aſſumptum fuit, quod veriſimum eſt nempè. Si fuerit recta A C vtcunque in B, diuiſa, cubum lineæ A B, plus cubo lineæ B C, atque triplo producto linearum A C, B C, A B, ſimul æquari cubo lineæ A C. Supponamus A B, æquari a, & BC, æquari b, tota A C, æquabitur $a+b$; erit autem productum linearum AC, BC, AB, idem quod ba^2+b^2a, huius triplū eſt $3ba^2+3b^2a$, huic autem ſi addantur cubi linearum A B, B C, fiet $a^3+3ba^2+3b^2a+b^3$; hæc autem ſumma, æqualis eſt cubo ex recta A C, nam hæc erat $a+b$, cuius cubus conſtat opere multiplicationis.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline ba+b^2 \\ a^2+ba \\ \hline a^2+2ba\dagger b^2 \\ a+b \\ \hline ba^2+2b^2a+b^3 \\ a^3+2ba^2+b^2a \\ \hline a^3+3ba^2\dagger 3b^2a+b^3 \end{array}$$

Vidimus hactenus methodum explicādi primum æquationis genus nunc ad ſecundum.

Sit igitur æquatio $u^3 = *\dagger pu\dagger q$, ſiuè quod idem eſt $u^3-pu=q$; huius æquationis radix erit $\text{℞}c(+\frac{1}{2}q\dagger\text{℞}(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3))+\text{℞}c(+\frac{1}{2}q-\text{℞}(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3))$. Suponamus $\text{℞}c(\dagger\frac{1}{2}q\dagger\text{℞}(\frac{1}{4}q^2\dagger\frac{1}{27}p^3))$ æquari A B, & deinde BC, eſſe $\text{℞}c(\dagger\frac{1}{2}q-\text{℞}(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3))$, Summa cuborum, vtriuſque lineæ, erit q.

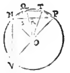
Si AC, æquetur u, cuius cubus erit u^3, ſi ab eius cubo iam dicto, auferatur triplum productū linearum A B, BC, & AC, ſeu u remanebunt cubi linearum AB, BC, qui ſimul ſumpti æquātur q. Triplum enim productum, rectarum AB, BC, & AC, ſeu u, plus cubis rectarū AB, BC, æquatur cubo ex AC, ſeù ex u; quare ſi à cubo ex AC, ſeù u, nempè ab u^3, auferamus triplum productum, ex AB, BC, & u, remanebunt cubi linearum A B, B C, hi autem ſimul ſumpti ſunt æquales q. At verò productum ex A B, & B C, eſt $\text{℞}c\,\frac{1}{27}p^3$, Siuè $\frac{1}{3}p$.

$$\begin{array}{r} \dagger\frac{1}{2}q\dagger\text{℞}(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3) \\ \dagger\frac{1}{2}q-\text{℞}(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3) \\ \hline q\ \text{Summa cuborum} \end{array}$$

productū ex AB, BC, hoc eſt ex $\text{℞}c(\frac{1}{2}q\dagger\text{℞}(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}))$ in $\text{℞}c(\dagger\frac{1}{2}q-\text{℞}(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3))$ eſt $\text{℞}c\,\frac{1}{27}p^3$, ſiuè $\frac{1}{3}p$, vt patet ex opere multiplicationis. Si enim $\dagger\text{℞}(\frac{1}{4}q-\frac{1}{27}p^3)$ ducatur in $-\text{℞}(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3)$. ob ſigna †, & --, fier productum $-\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3$, multiplicata verò vtraque radice per $\dagger\frac{1}{2}q$, euaneſcent producta ob ſigna †, & --, & remanet $\dagger\frac{1}{2}q$, in ſe ducendum, vt fiat $\frac{1}{4}q^2$, quoaddito ad $-\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3$, fiet ſūma $\text{℞}c\,\frac{1}{27}p^3$, & erit totum productum ex illa multiplicatione. Quamobrem eius radix cubica $\frac{1}{3}p$, erit quoque productum; huius autem triplum eſt p, quo ducto in u, fit p u, æquale triplo producto linearum A B, B C, A C; & quia u^3, minus huiuſmodi triplo producto æquabatur cubis ex A B, B C, qui æquales erant q; proindè u^3-pu, æquabitur q.

$$\begin{array}{r} \text{℞}c(\dagger\frac{1}{2}q\dagger\text{℞}(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3)) \\ \text{℞}c(\dagger\frac{1}{2}q-\text{℞}(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3)) \\ \hline +\text{℞}c(\ldots\ldots)-\frac{1}{4}q^2\dagger\frac{1}{27}p^3 \\ \frac{1}{4}q^2-\text{℞}c(\ldots\ldots) \\ \hline \text{℞}c\,\frac{1}{27}p^3 \\ \text{ſeu}\ \frac{1}{3}p \end{array}$$

Numeris autem illuſtratur ſuperior doctrina hunc in modum. Sit æquatio 1 c -- 72 R = 280, Sumatur dimidium numeri 280, nempè 140, & ab eius quadrato ſubtrahatur 13824, nempè quotiens, qui oritur diuiſo 373248, cubo ex 72, per 27, & remanet 5776, cuius radix quadrata eſt 76, qua ſubtracta ex 140, remanet 64, huius radix cubica eſt 4, quæ ſeruanda eſt. Sumatur idem 140, cui addatur 76, nempè radix illius numeri 5776, ortum ducentis ex illa ſubtractione; facta autem additione habetur 216; cuius latus cubicum eſt 6, cui addatur latus cubicum 4, ſuperius ſeruatum, & fiet 10, pro radice quæſita.



Non rarò contingit ſtante æquatione $u^3 = * \, pu + q$, Seù $u^3 - pu = q$; Quadratum dimidij vltimi termini ſcilicet q, non eſſe maius cubo trientis quantitatis cognitæ, penultimi termini nempè p; Tunc ſupponendus circulus N Q P V, cuius ſemidiameter erit N O, iſque ſit $\sqrt{\frac{1}{3} p}$; ſiue media proportionalis inter tertiam partem quantitatis notæ p, & vnitatem. Huic circulo ſupponatur inſcripta N P, quæ ſit $\frac{3q}{p}$ nempè, vt ſit ad alteram datam quantitatem q, vt vnitas ad tertiam partem ipſius p; modo vterque arcus, tam ſcilicet N Q P, quàm N V P, diuidatur trifariam; tunc enim N Q, radix erit quæſita quemadmodum N V. Itaque iſtius æquationis radix non alio modo exprimetur, quam dicendo, eſſe ſubtendentem illius arcus, qui tertia pars eſt arcus illius cuius ſubtendens eſt $\frac{3q}{p}$, radio ſiuè ſemidiametro exiſtente vno. Vel illa, quæ ſubtendit tertiam partem reliqui arcus &c.

Quamobrem ſi daretur æquatio 1 c -- 30 R = 36; procedendum, vt ſupra. Sed ad generalem noſtram conſtruendi rationem accedamus.

Lineæ MEDICEAE, *quas Auctor ad generalem Effectionem Problematum excogitauit, luculenter explicantur.*

Prætermiſſis autem Lineis antiquitùs excogitatis, de quibus iam ſuprà multa diximus; proximum eſt, vt quas adinuenimus, hic ſubijciamus, quarum tria ſunt genera. Quorum Primum decem continet Lineas.

Primum genus Linearum MEDICEARVM, *& ad hoc primum genus pertinentium*

PRIMA

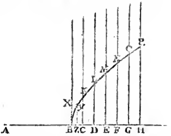
Pro effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit $a^2 + ba = z^2$.

PRimi generis Linearum, quas Mediceas appello, prima quidem eſt illa, quæ ad Geometricam effectionem conducit Problematum eorum, quibus fit ſatis per æquationem, in qua Quadratum afficitur adiunctione plani ſub latere, dataque coefficiente longitudine. Idem profectò, quod, diſſimulare non licet, Circuli beneficio conſequimur; quia tamen nobis propoſitum, eſt lineis, quas adinuenimus, Problematibus omnibus obuiam ire; hanc ob id placuit quoque in medium inuehere, nè ex hac parte defeciſſe videremur.

Sit igitur æquatio $a^2 + ba = z^2$, ad quam Analyſis conduxit, vt ea explicata Geometrica Effectio, dictante Poriſmate, compareretur. Reſoluta in Analogiſmum, vt par eſt; fiet vt $a + b$, ad z, ita z, ad a.

Expoſita

Expoſita ſit recta A B, quæ ſit coefficiens longitudo, eaque intelligatur ad partes B, in infinitum producta; & in ipſa producta ſumantur qualeſcunque partes BC, BD, BE, BF, BG, BH, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H &c. erigantur perpendiculares, & inter AC, BC, media reperiatur proportionalis; item inter A D, B D; item inter A E, B E; inſuper inter A F, B F; item inter AG, BG, inſuper inter A H, BH; & ita deinceps, quibus medijs proportionalibus fiant æquales C K, D L, E M, FN, G O, H P.



Per puncta verò B, K, L, M, N, O, P, intelligatur ducta quadam linea, hæc illa eſt, quæ ad Effectionem prædictam conducit; erit enim rectangulum A C B, æquale quadrato C K, nec diſſimiliter rectangulum A D B, æquale quadrato D L, & ſic de reliquis ſed rectangulum A C B æquale eſt quadrato B C, vnà cum rectangulo A B C; ergo quadratum B C, vnà cum rectangulo A B C, æquabitur quadrato C K, & quadratum B D, vnà cum rectangulo A D B æquabitur quadrato D L, & ita deinceps. Huiuſmodi igitur indolis eſt linea B K L M N O P, vt ſi ex quocunque puncto, exempli gratia Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, quadratum B Z, vnà cum rectangulo A B Z, æquale ſit quadrato Z Y; quamobrem ſi coefficiens longitudo fuerit A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B, ſecetur B X æqualis rectæ, quæ poſſit comparationis homogeneum; & ex puncto X agatur X Y parallela ipſi A H; ex puncto verò Y, cadat perpendicularis YZ; quadratum B Z, vna cum rectangulo A B Z, æquabitur quadrato Z Y, ſeu B X. Innoteſcit igitur ignota quantitas, nempe B Z, vtpote illa, cuius quadratum vna cum rectangulo A B Z æquatur quadrato B X. Propoſitæ igitur æquationis radix erit B Z, cùm eius quadratum, vnà cum rectangulo ſub eadem, dataque coefficiente longitudine A B, æquale ſit quadrato B X dato comparationis homogeneo.

Hæc igitur eſt geneſis primæ lineæ ex ijs quas adinueni, quaſque Mediceas appello.

Ad primum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

SECVNDA

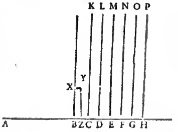
Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$a^3 + b^2 a = b^2 d.$$

SEcunda linearum mediceearum eſt, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus ſit ſatis per æquationem, in qua cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano.

Sit igitur æquatio $a^3 + b^2 a = b^2 d$, ad quam Analyſis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio dictante Poriſmate comparetur. Reſoluta in analogiſmum, vt par eſt, fit vt $a^2 + b^2$ ad b^2, ità d ad a.

Expoſita ſit recta A B, cuius quadratum ſit coefficiens planum ſublaterale, eaque intelligatur ad partes B in infinitum protracta; ſumantur qualeſcunque partes BC, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares. Fiat autem vt quadratum A B ad aggregatum quadratorum A B, B C, ità B C ad ſegmentum in C K; & vt quadratum A B ad aggregatum quadratorum A B, B D, ità B D ad ſegmentum in D L; vt quadratum A B ad aggregatum



gatum quadratorum A B, B E, ità B E, ad ſegmentum in E M; vt quadratum A B, ad aggregatum quadratorum A B, B F, ità BF, ad ſegmentum in F N; vt quadratum A B ad aggregatum quadratorum A B, B G, ita B G, ad ſegmentum in G O; vt quadratum A B, ad aggregatum quadratorum A B, B H, ità B H, ad ſegmentum in H P; & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum ſegmentorum, quorum initio ſunt B, D, E, &c. intelligatur ducta quædam linea; hæc illa eſt, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim ſit, vt quadratum A B, ad aggregatum quadratorum A B, B C, ità B C, ad ſegmentum in C K, erit conuertendo vt aggregatum quadratorum A B, B C, ad quadratum A B, ità prædictum ſegmentum in C K, ad B C; quamobrem ſolidum ſub B C, in aggregatum quadratorum A B, B C, hoc eſt cubus ex B C, vnà cum ſolido ſub B C, & quadrato A B, æquabitur ſolido abs ſegmento in C K in quadratum A B; & cubus ex B D, vnà cum ſolido ab eadem B D in quadratum A B, æquabitur ſolido abs ſegmento in D L in quadratum A B; & ità deinceps. Huiuſmodi igitur indolis eſt linea prædicta, vt ſi ex quocunque puncto, ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens prædictæ lineæ in puncto Y; quadratum B Z, vnà cum quadrato A B, ad quadratum A B, rationem habeat, vt Z Y, ad B Z; atque adeò ſolidum factum abs B Z in planum, quod conſtat duobus quadratis rectarum A B, B Z, æquabitur ſolido facto abs Z Y in quadratum A B, & ſic de reliquis. Quamobrem ſi coefficiens planum fuerit quadratum rectæ A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B, ſecetur B X æqualis rectæ, quæ ducta in quadratum A B facit comparationis homogeneum;

Huiuſmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ deſcriptæ, in puncto Y.

& ex puncto X agatur X Y parallela ipſi A H, ex puncto verò Y cadat perpendicularis Y Z, ſolidum factum abs B Z in planum, quod conſtat duobus quadratis rectarum A B, B Z, hoc eſt cubus B Z, vnà cum ſolido abs eadem B Z in quadratum A B, æquabitur ſolido abs Z Y in quadratum A B. Innoteſcit igitur ignota quantitas, nempè B Z, vtpotè illa cuius cubus, vnà cum ſolido ab eadem B Z, in quadratum A B, æqualis eſt ſolido abs Z Y, in quadratum A B. Propoſitæ igitur æquationis radix erit B Z, cum eius cubus vnà cum ſolido ab eadem in quadratum A B æqualis ſit ſolido abs Z Y, hoc eſt B X, in quadratum eiuſdem A B dato comparationis homogeneo.

Hæc igitur eſt geneſis ſecundæ Lineæ ex ijs, quas adinueni, quaſque Mediceas appello.

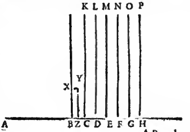
Ad primum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

TERTIA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit
$a^{3} + b\,a^{2} = b^{2} d$.

TErtia Medicearum linearum eſt, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit ſatis per æquationem, in qua cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub quadrato, dataque coefficiente longitudine.

Sit igitur æquatio $a^{3} + b\,a^{2} = b^{2} d$, *ad quam analyſis conduxit, vt ea explicata, Geometrica effectio, dictante Poriſmate, compareatur. Reſoluta in analogiſmum, vt par eſt, fit vt* $a^{2} + b\,a$ *ad* b^{2}, *ita* d, *ad* a.



Expoſita ſit recta A B, coefficiens longitudo ſub quadratica, eaque intelligatur ad partes B, protracta in infinitum, & in ipſa in infinitum, protracta ſumantur qualeſcunque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, erigantur perpendiculares, fiat autem vt quadratum A B, ad aggregatum ex quadrato B C, & rectangulo A B C, hoc eſt ad rectangulum A C B, ità B C ad ſegmentum in C K, deindè vt quadratum

A B, ad

A B, ad rectangulum A D B, ità B D, ad ſegmentum in D L, & vt quadratum A B, ad rectangulum A E B, ità B E ad ſegmentum in E M; & vt quadratum A B ad rectangulum A F B, ità B F ad ſegmentum in F N; præterea vt quadratum A B ad rectangulum A G B, ità B G ad ſegmentum in G O, & vt quadratum A B ad rectangulum A H B, ità B H ad ſegmentum in H P, & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum ſegmentorum, quorum initia ſunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea; hæc illa eſt, quæ ad prædictam effectionem conducit. Cùm enim ſit, vt quadratum A B, ad rectangulum A C B, ità B C ad ſegmentum in C K; erit conuertendo, vt rectangulum A C B, ad quadratum A B, ità ſegmentum in C K ad B C; quamobrem ſolidum abs B C in rectangulum A C B, hoc eſt in quadratum B C, vnà cum rectangulo A B C, hoc eſt cubus ipſius B C, vnà cum ſolido ſub A B in quadratum eiuſdem B C, æquabitur ſolido abs ſegmento in C K, in quadratum eiuſdem A B; & cubus ex B D, vnà cum ſolido ex A B in quadratum B D, æquabitur ſolido abs ſegmento D L in quadratum A B, & ità deinceps. Huiuſmodi igitur indolis eſt linea prædicta vt ſi ex quocunque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ prædictæ in puncto Y, erit quad. BZ, vnà cum rectang. ABZ, hoc eſt rectangulum A Z B, ad quad. AB vt Z Y ad B Z; atq; adeò ſolidum factum abs BZ in rectangulum AZB, ſeu in planum, quod conſtat quadrato B Z, & rectangulo A B Z, æquabitur ſolido facto abs Z Y, in quadratum A B; & ſic de reliquis. Quamobrem ſi coefficiens longitudo ſub quadratica fuerit recta A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B, ſecetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in quadratum A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallela ipſi A H, ex puncto verò Y cadat perpendicularis Y Z, ſolidum factum abs B Z in rectangulum A Z B, ſeu in planum, quod conſtat quadrato B Z, & rectangulo A B Z, hoc eſt cubus B Z vnà cum ſolido ab eiuſdem B Z quadrato in longitudinem A B, æquabitur ſolido abs Z Y in quadratum A B. Innoteſcit igitur ignota quantitas, nempè B Z, vtpotè illa, cuius cubus, vnà cum ſolido ab eiuſdem B Z quadrato in longitudinem A B, æqualis eſt ſolido abs Z Y, in quadratum A B. Propoſitæ igitur æquationis radix erit B Z; cùm eius cubus, vnà cum ſolido à quadrato eiuſdem in longitudinem A B, æqualis ſit ſolido abs Z Y, ſeu B X, in quadratum eiuſdem A B dato comparationis homogeneo.

Huiuſmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ deſcriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur eſt geneſis tertiæ lineæ ex ijs, quas adinueni, quaſque Mediceas appello.

Ad primum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

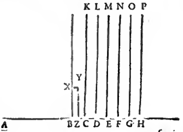
QVARTA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$a^4 + b^3 a = b^3 d.$$

QVarta Medicearum Linearum eſt, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus ſit ſatis per æquationem, in qua Quadrato-quadratum afficitur adiunctione plano-plani ſub latere, datoque coefficiente ſolido.

Sit igitur æquatio $a^4 + b^3 a = b^3 d$, ad quam analyſis conduxit, vt ea explicata, Geometrica effectio, dictante Poriſmate, comparetur. Reſoluta in analogiſmum, vt par eſt, fit vt $a^3 + b^3$ ad b^3, ita d, ad a.



Expoſita ſit recta A B, cuius cubus ſit coefficiens ſolidum ſublaterale; eaque intelligatur ad partes B, protracta in infinitum, & in ipſa protracta ſumantur qualeſcumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, erigatur perpendiculares; fiat autem vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B C, & cubo A B, ità B C, ad ſegmentum in C K, & vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B D, & cubo A B, ità B D, ad ſeg-

ſegmentum in D L, & vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B E, & cubo A B, ità B E, ad ſegmentum in E M; & vt cubus A B ad ſolidum conſtans cubo B F, & cubo A B, ità B F ad ſegmentum in F N, & vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B G, & cubo A B, ità B G ad ſegmentum in G O; prætereà vt cubus A B ad ſolidum conſtans cubo B H & cubo A B, ità B H, ad ſegmentum in H P, & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum ſegmentorum, quorum initia ſunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea, hæc illa eſt, quæ ad prædictam effectionem conducit. Cum enim ſit, vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B C, & cubo A B ità B C, ad ſegmentum in C K; erit conuertendo, vt ſolidum conſtans cubo B C, & cubo A B, ad cubum A B, ità ſegmentum in C K, ad B C; quapropter plano-planum factum abs B C, in ſolidum conſtans cubo B C, & cubo A B, hoc eſt quadrato-quadratum ipſius B C, vnà cum plano-plano abs B C in cubum A B, æquabitur plano-plano abs ſegmento in C K in cubum A B, & quadrato-quadratum ex B D, vnà cum plano-plano ab eadem B D, in cubum A B, æquabitur plano-plano abs ſegmento in D L, in cubum A B; & ità deinceps. Huiuſmodi igitur indolis eſt linea prædicta, vt ſi ex quocumque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens prædictæ lineæ in puncto Y, erit vt cubus B Z, vnà cum cubo A B, ad cubum A B, ità Z Y, ad B Z, atque adeò quadrato-quadratum B Z, vnà cum plano-plano abs B Z, in cubum A B, æquale erit plano-plano abs Z Y, in cubum A B, & ſic de reliquis. Quamobrē ſi coefficiens ſolidum ſublaterale fuerit cubus A B, & in perpēdiculari, erecta ex puncto B, ſecetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in cubum A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallala ipſi A H, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z, plano-planum factum abs B Z, in ſolidum conſtans cubo B Z, & cubo A B, hoc eſt quadrato-quadratum ipſius B Z, vnà cum plano-plano abs B Z, in cubum A B, æquabitur plano-plano abs Z Y, hoc eſt B X, in cubum A B. Innoteſcit igitur ignota quantitas, nempè B Z, vtpotè illa, cuius quadrato-quadratum vnà cum plano-plano ab eadem B Z, in cubum A B, æquale eſt plano-plano abs Z Y, hoc eſt B X, in cubum A B. Propoſitæ igitur æquationis radix eſt B Z, cum eius quadrato-quadratum, vnà cum plano-plano ab eadem in cubum A B, æquale ſit plano-plano abs Z Y, ſeu B X, in cubum eiuſdem A B, dato comparationis homogeneo.

Huiuſmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ deſcriptæ, in puncto Y,

Hæc igitur eſt Geneſis quartæ lineæ ex ijs, quas adinueni, quaſque Mediceas appello.

Ad primum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

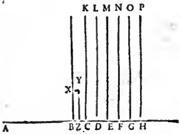
QVINTA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$a^4 + b a^3 = b^3 d.$$

QVinta Medicearum Linearum eſt, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit ſatis per æquationem, in qua Quadrato-quadratum afficitur adiunctione plano-plani ſub cubo, dataque coefficiente longitudine.

Sit igitur æquatio $a^4 + b a^3 = b^3 d$, *ad quam Analyſis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio, dictante Poriſmate, comparetur. Reſoluta in analogiſmum, vt par eſt fit, vt* $a^3 + b a^2$ *ad* b^3, *ità d ad a.*



Expoſita ſit recta A B, coefficiens longitudo, eaque intelligatur ad partes B, producta in infinitum, & in ipſa protracta ſumantur qualeſcumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; Fiat autem vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B C, & ſolido à quadrato eiuſdem B C, in longitudinem A B, ità B C, ad ſegmentum in C K, & vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B D, & ſolido à quadrato B D, in longi-

tudinem

tudinem A B, ità B D, ad ſegmentum in D L, & vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B E, , cum ſolido à quadrato B E, in longitudinem A B, ità B E, ad ſegmentum in E M; & vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B F, & ſolido à quadrato B F, ad longitudinem A B, ità B F ad ſegmentum in F N, & vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B G, vnà cum ſolido à quadrato B G, in longitudinem A B, ità B G ad ſegmentum in G O; prætereà vt cubus A B ad ſolidum conſtans cubo B H, cum ſolido à quadrato B H, in longitudinem A B, ità B H, ad ſegmentum in H P, & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum ſegmentorum, quorum initia ſunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea: Hæc illa eſt, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cum enim ſit, vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B C, & ſolido à quadrato B C, in longitudinem A B, ità B C, ad ſegmentum in C K; erit conuertendo vt cubus B C, vnà cum ſolido à quadrato B C, in longitudinem A B, ad cubum A B, ità ſegmentum in C k, ad B C: Quapropter plano-planum factum abs BC, in ſolidum conſtans cubo B C, & ſolido à quadrato B C, in longitudinem A B, hoc eſt quadrato-quadratum ipſius B C, vnà cum plano-plano à cubo eiuſdem B C, in longitudinem A B, æquabitur plano-plano abs ſegmento in C K, in cubum A B, & quadrato-quadratum ex B D, vnà cum plano-plano à cubo B D, in longitudinem A B, æquabitur plano-plano abs ſegmento ipſius D L, in cubum A B; & ità deinceps. Huiuſmodi igitur indolis eſt linea iam dicta, vt ſi ex quocumque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ prædictæ in puncto Y, erit vt cubus B Z, vnà cum ſolido à quadrato eiuſdem B Z, in longitudinem A B, ad cubum A B, ità Z Y, ad B Z, atque adeò quadrato-quadratum B Z, vnà cum plano-plano à cubo B Z, in longitudinem A B, æquale erit plano-plano abs Z Y, in cubum A B, & ſic de reliquis. Quamobrem ſi coefficiens longitudo ſubcubica fuerit A B, & in perpendiculari, erecta ex puncto B, ſecetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in cubum A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallala ipſi A H, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z, plano-planum factum abs B Z, in ſolidum conſtans cubo B Z, & ſolido à quadrato eiuſdem B Z, in longitudinem A B, hoc eſt quadrato-quadratum ipſius B Z, vnà cum plano-plano à cubo eiuſdem B Z, in longitudinem A B, æquabitur plano-plano abs Z Y, hoc eſt B X, in cubum A B. Innoteſcit igitur ignota quantitas, nempè B Z, vtpotè illa, cuius quadrato-quadratum, vnà cum plano-plano à cubo eiuſdem B Z, in longitudinem A B, æquale eſt plano-plano abs Z Y, hoc eſt B X, in cubum A B. Propoſitæ igitur æquationis radix erit B Z, cùm eius quadrato-quadratum, vnà cum plano-plano à cubo eiuſdem in longitudinem A B, æquale ſit plano-plano abs Z Y, ſeu B X, in cubum eiuſdem A B, dato comparationis homogeneo.

Huiuſmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ deſcriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur eſt Geneſis quintæ lineæ ex ijs, quas adinueni, quaſque Mediceas appello.

Ad primum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

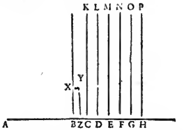
SEXTA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$a^4 + b^2 a^2 = b^3 d.$$

SExta Medicearum Linearum eſt, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit ſatis per æquationem, in qua Quadrato-quadratum afficitur adiunctione plano-plani ſub latere, datoque coefficiente ſolido.

Sit igitur æquatio $a^4 + b^2 a^2 = b^3 d$, ad quam Analyſis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio, dictante Poriſmate, compareтur. Reſoluta in analogiſmum, vt par eſt fit, vt $a^3 + b^2 a$ ad b^3, ità d ad a.



Expoſita ſit recta A B, cuius quadratum eſt coefficiens planum ſubquadraticum, eaque intelligatur ad partes B, producta in infinitum, & in ipſa producta ſumantur qualeſcumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; Fiat autem vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B C, & ſolido ab eadem B C, in quadratum A B, ità B C, ad ſegmentum ipſius C K, & rurſus vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B D, & ſolido ab eadem B D, in quadratum A B, ità B D, ad ſegmentum ipſius D L; & vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B E, & ſolido ab eadem B E, in quadratum A B, ità B E, ad ſegmentum ipſius E M; & vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B F, & ſolido ab eadem B F; in quadratum A B, ità B F, ad ſegmentum ipſius F N; & vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B G, & ſolido ab eadem B G, in quadratum A B, ità B G, ad ſegmentum ipſius G O; & vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B H, & ſolido ab eadem B H, in quadratum A B, ità B H, ad ſegmentum ipſius H P, & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum ſegmentorum, quorum initia ſunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea: Hæc illa eſt, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim ſit, vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B C, & ſolido ab eadem B C, in quadratum A B, ità B C, ad ſegmentum ipſius C K, erit conuertendo, vt ſolidum conſtans cubo B C, & ſolido ab eadem B C, in quadratum A B, ad cubum A B, hoc eſt cubus B C, vnà cum ſolido ab eadem B C, in quadratum A B, ad cubum A B, ità ſegmentum ipſius C K, ad B C, &c. quapropter plano-planum factum abs B C, in ſolidum conſtans cubo B C, & ſolido ab eadem B C, in quadratum A B, hoc eſt quadrato-quadratum ipſius B C, vnà cum plano-plano à quadrato ipſius B C, in quadratum A B, æquabitur plano-plano abs ſegmento ipſius C K, in cubum A B; & quadrato-quadratum ex B D, vnà cum plano-plano à quadrato eiuſdem B D, in quadratum A B, æquabitur plano-plano abs ſegmento ipſius D L, in cubum A B, & ità deinceps. Huiuſmodi igitur indolis eſt linea iam dicta, vt ſi ex quocumque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ prædictæ in puncto Y, erit vt cubus B Z, vnà cum ſolido ab eadem B Z, in quadratum A B, ad cubum A B, ità Z Y, ad B Z; atque adeò quadrato-quadratum B Z, vnà cum plano-plano à quadrato eiuſdem B Z, in quadratum A B, æquabitur plano-plano abs Z Y, in cubum A B, & ſic de reliquis. Quamobrem ſi ſubquadraticum coefficiens planum fuerit quadratum ipſius A B, & in perpendiculari ex puncto B, ſecetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in cubum A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallela ipſi A H, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z: Plano-planum factum abs B Z, in ſolidum conſtans cubo eiuſdem B Z, & ſolido ab ipſa B Z, in quadratum A B, hoc eſt quadrato-quadratum B Z, vnà cum plano plano à quadrato eiuſdem B Z, in quadratum A B, æquabitur plano-plano abs Z Y, hoc eſt B X, in cubum A B. Innoteſcit igitur ignota quantitas nempè B Z, vtpotè illa, cuius quadrato-quadratum, vnà cum plano-plano à quadrato eiuſdem B Z, in quadratum A B, æquale eſt plano-plano abs Z Y, hoc eſt B X, in cubum A B. Propoſitæ igitur æquationis radix erit B Z, cùm eius quadrato-quadratum, vnà cum plano-plano à quadrato eiuſdem in quadratum A B, æquale ſit plano-plano abs Z Y, ſeu B X, in cubum eiuſdem A B, dato comparationis homogeneo.

Huiuſmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ deſcriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur eſt Geneſis ſextæ Lineæ ex ijs, quas adinueni, quaſque Mediceas appello.

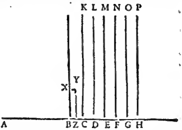
Ad primum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

SEPTIMA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit
$$a^5 + b^4 a = b^4 d.$$

SEptima Medicearum Linearum eſt, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit ſatis per æquationem, in qua Quadrato-cubus afficitur adiunctione plano-ſolidi ſub latere, datoq ue coefficiente plano-plano.

Sit igitur æquatio $a^5 + b^4 a = b^4 d$, *ad quam Analyſis conduxit, vt ea explicata, Geometrica effectio, dictante Poriſmate, comparetur. Reſoluta in analogiſmum, vt par eſt, ſit vt* $a^4 + b^4$ *ad* b^4, *ita* d, *ad* a.



Expoſita ſit recta A B, cuius quadrato-quadratum ſit coefficiens plano-planum ſublaterale; eaque intelligatur ad partes B, protracta in infinitum, & in ipſa protracta ſumantur qualeſcumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; fiat autem reſolutio quadrato quadratorum in ſimplices longitudines, vt ſuo loco tradidimus, ſecundum poſitam quantitatem. Quadrato-quadratum A B, reſolutum ſit in longitudinem α, & quadrato-quadratum ex B C, reſolutum ſit in longitudinem β, & quadrato-quadratum B D, reſolutum ſit in longitudinem γ, quadrato-quadratum B E, in longitudinem δ, quadrato-quadratum B F, in longitudinem ε quadrato-quadratum B G, in longitudinem ζ, quadrato-quadratum B H, in longitudinem η, & ſic deinceps. Deindè ex his duabus α, & β, fiat μ, mox verò fiat, vt α, ad μ, ità B C, ad ſegmentum ipſius C k, & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum ſegmentorum, quorum initia ſunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea; Hæc illa eſt, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim ſit, vt B C, ad ſegmentum ipſius C K, ità α, ad μ; ergo conuertendo erit vt μ ad α, ità ſegmentum ipſius C K, ad B C, quapropter plano-ſolidum factum abs β ſeu B C, in plano planum conſtans α ſeu quadrato-quadrato A B, & β ſeu quadrato-quadrato B C hoc eſt quadrato-cubus ipſius B C, vnà cum plano-ſolido ab eadem B C, in quadrato-quadratum ipſius A B, æquabitur plano-ſolido abs ſegmento ipſius C K, in quadrato-quadratum eiuſdem A B; & quadrato-cubus ex B D, vnà cum plano-ſolido ab eadem B D, in quadrato-quadratum ipſius A B, æquabitur plano-ſolido abs ſegmento ipſius D L in quadrato-quadratum eiuſdem A B, & ità deinceps. Huiuſmodi igitur indolis eſt linea prædicta vt ſi ex quocunque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, erit vt quadrato-quadratum BZ, vnà cum quadrato-quadrato A B, ad quadrato-quadratum A B, ità Z Y ad B Z; atque adeò quadrato-cubus B Z, vnà cum plano-ſolido ab eadem B Z, in quadrato-quadratum A B, æquabitur plano-ſolido abs Z Y, in quadrato-quadratum A B; & ſic de reliquis; Quamobrem ſi coefficiens plano-planum ſublaterale fuerit quadrato-quadratum ipſius A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B, ſecetur BX, æqualis rectæ, quæ ducta in quadrato-quadratum ipſius A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X, agatur X Y, parallela ipſi A H, ex puncto Y, cadat perpendicularis Y Z, plano-ſolidum factum abs B Z, in plano-planum conſtans quadrato-quadrato ipſius B Z, & quadrato-quadrato ipſius A B, hoc eſt quadrato-cubus ipſius B Z, vnà cum plano-ſolido ab eadem B Z, in quadrato-quadratum A B, æquabitur plano-ſolido abs Z Y, hoc eſt B X, in quadrato-quadratum A B. Innoteſcit igitur ignota quantitas, nempè B Z, vtpotè illa, cuius quadrato-cubus, vnà cum

Huiuſmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ deſcriptæ, in puncto Y.

plano-ſolido ab eadem in quadrato-quadratum A B, æquatur plano-ſolido abs Z Y, hoc eſt B X, in quadrato-quadratum A B. Propoſitæ igitur æquationis radix erit B Z; cùm eius quadrato-cubus, vnà cum plano ſolido ab eadem in quadrato-quadratum A B, æqualis ſit plano-ſolido abs Z Y, ſeu B X, in quadrato-quadratum eiuſdem A B dato comparationis homogeneo.

Hæc igitur eſt geneſis Septimæ lineæ ex ijs, quas adinueni, quaſque Mediceas appello.

Ad primum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

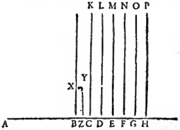
OCTAVA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$a^5 + b^3 a^2 = b^3 d^2.$$

OCtaua Medicearum Linearum eſt, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit ſatis per æquationem, in qua Quadrato-cubus afficitur adiunctione plano-ſolidi ſub quadrato, datoque coefficiente ſolido.

Sit igitur æquatio $a^5 + b^3 a^2 = b^3 d^2$, *ad quam Analyſis conduxit, vt ea explicata Geometrica Effectio, dictante Poriſmate, comparetur. Reſoluta in Analogiſmum, vt par eſt; fit vt* $a^3 + b^3$, *ad* b^3, *ita* d^2 *ad* a^2.



Expoſita ſit recta A B, cuius cubus ſit coefficiens ſolidum ſub quadraticum; eaque intelligatur ad partes B, protracta in infinitum; & in ipſa protracta ſumantur qualeſcumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; Fiat autem vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B C, & cubo A B, ità quadratum B C, ad quadratum ſegmenti ipſius C K; & vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B D, & cubo A B, ità quadratum B D, ad quadratum ſegmenti ipſius D L; & vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B E, & cubo A B, ità quadratum B E, ad quadratum ſegmenti ipſius E M; & vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B F, & cubo A B, ità quadratum B F, ad quadratum ſegmenti ipſius F N; & vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B G, & cubo A B, ità quadratum B G, ad quadratum ſegmenti ipſius G O; & vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B H, & cubo A B, ità quadratum B H, ad quadratum ſegmenti ipſius H P; & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum ſegmentorum quorum initia ſunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea; Hæc illa eſt, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim ſit, vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B C, & cubo A B, ità quadratum B C, ad quadratum ſegmenti ipſius C K; erit conuertendo, vt ſolidum conſtans cubo B C, & cubo A B, hoc eſt cubus B C, vnà cum cubo A B, ad cubum A B, ità quadratum ſegmenti ipſius C K, ad quadratum B C: Quapropter plano-ſolidum factum à quadrato B C, in ſolidum conſtans cubo B C, & cubo A B; hoc eſt quadrato-cubus ipſius B C, vnà cum plano-ſolido à quadrato eiuſdem B C, in cubum A B, æquabitur plano-ſolido à quadrato ſegmenti ipſius C K, in cubum eiuſdem A B: & quadrato-cubus ex B D, vnà cum plano-ſolido à quadrato eiuſdem B D, in cubum A B, æquabitur plano-ſolido abs quadrato ſegmenti ipſius D L, in cubum A B, & ità deinceps. Huiuſmodi igitur indolis eſt linea prædicta; vt ſi ex quocumque puncto, exempli gratia Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens iam dictæ lineæ in puncto Y, erit vt cubus B Z, vnà cum cubo A B, ad cubum A B, ità quadratum Z Y, ad quadratum B Z; atque adeò quadrato-cubus B Z, vnà cum plano-ſolido à quadrato eiuſdem B Z, in cubum A B, æquabitur plano-ſolido abs quadrato Z Y, in cubum A B, & ſic de reliquis; Quamobrem ſi ſub-

qua-

quadraticum coefficiens, ſolidum fuerit cubus ipſius A B, & in perpendiculari ex puncto B, ſecetur B X æqualis rectæ, cuius quadratum ductum in cubum A B, facit comparationis homogeneum; & ex puncto X agatur X Y, parallela ipſi A H; ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z, plano-ſolidum factum abs quadrato B Z, in ſolidum conſtans cubo B Z, & cubo A B, hoc eſt quadrato-cubus ipſius B Z, vna cum plano ſolido à quadrato eiuſdem B Z, in cubum A B, æquabitur plano-ſolido abs quadrato Z Y, hoc eſt quadrato B X, in cubum A B; Innoteſcit igitur ignota quantitas, nempè B Z, vtpote illa, cuius quadrato-cubus, vnà cum plano-ſolido à quadrato eiuſdem B Z, in cubum A B, æquatur plano-ſolido abs quadrato Z Y, hoc eſt quadrato B X, in cubum A B. Propoſitæ igitur æquationis radix erit B Z, cùm eius quadrato-cubus, vnà cum plano-ſolido à quadrato eiuſdem in cubum A B, æqualis ſit plano-ſolido abs quadrato Z Y, ſeu quadrato B X, in cubum eiuſdem A B, dato comparationis homogeneo.

Huiuſmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ deſcriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur eſt Geneſis Octauæ Lineæ ex ijs, quas adinueni, quaſque Mediceas appello.

Ad primum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

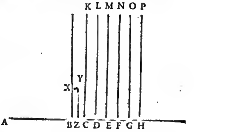
NONA

Pro effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$a^5 + b^2 a^3 = b^3 d^2.$$

NOna Medicearum Linea ad Geometricam effectionem conducit Problematum, quibus fit ſatis per æquationem, in qua Quadrato-cubus afficitur adiunctione plano-ſolidi ſub cubo, datoque coefficiente plano.

Sit igitur æquatio $a^5 + b^2 a^3 = b^3 d^2$, ad quam Analyſis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio dictante Poriſmate compareretur. Reſoluta in analogiſmum, vt par eſt, fit vt $a^2 + b$ a, ad b, ità d^2 ad a^2.



Expoſita ſit recta A B, cuius quadratum ſit coefficiens planum, ſubcubicumcaque intelligatur ad partes B; in infinitum protracta, & in ipſa producta ſumantur qualeſcumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; Fiat autem vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B C, & ſolido abs B C, in quadratum A B, ità quadratum B C, ad quadratum ſegmenti ipſius C K; & vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B D, & ſolido abs B D, in quadratum A B, ità quadratum B D, ad quadratum ſegmenti ipſius D L; Deindè vt cubus B E, ad ſolidum conſtans cubo B E, & ſolido abs B E, in quadratum A B, ità quadratum B E, ad quadratum ſegmenti ipſius E M; & vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B F, & ſolido abs B F, in quadratum A B, ità quadratum B F, ad quadratum ſegmenti ipſius F N; & vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B G, & ſolido abs B G, in quadratum A B, ità quadratum B G, ad quadratum ſegmenti ipſius G O, & vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B H, & ſolido abs B H, in quadratum A B, ità quadratum B H, ad quadratum ſegmenti ipſius H P; & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum ſegmentorum, quorum initia ſunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea, hæc illa eſt, quæ ad effectionem prædictam conducit; Cùm enim ſit vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B C, & ſolido abs B C, in quadratum A B, ità quadratum B C, ad quad. ſegmenti ipſius C K; erit conuertendo, vt ſolidum conſtans cubo B C, & ſolido abs B C, in quadratum A B, ad cubum A B, ità quadratum ſegmenti ipſius C K, ad quadratum B C; quamobrem plano-ſolidum abs B C, quadrato in ſolidum conſtans cubo B C, & ſolido abs B C, in quadratum A B, hoc eſt quadrato-cubus ipſius B C, vnà

cum

cum plano-ſolido abs cubo B C, in quadratum A B, æquabitur plano-ſolido abs quadrato ſegmenti ipſius C K, in cubum A B; & quadrato-cubus abs B D, vnà cum plano-ſolido eiuſdem B D, cubi in quadratum A B, æquabitur plano-ſolido ex quadrato ſegmenti ipſius D L, in cubum A B, & ità deinceps. Huiuſmodi igitur indolis eſt Linea prædicta, vt ſi ex quocumque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, quadrato-cubus B Z, vnà cum plano-ſolido ex cubo B Z, in quadratum A B, ſit æqualis plano-ſolido abs quadrato Z Y, in cubum A B, & ſic de reliquis. Quamobrem ſi coefficiens planum ſubcubicum fuerit quadratum rectæ A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B, ſecetur B X, æqualis ei, cuius quadratum ductum in cubum ipſius A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallela ipſi A H, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z; plano-ſolidum factum abs quadrato B Z, in ſolidum conſtans cubo B Z, & ſolido ab eadem B Z, in quadratum A B; hoc eſt quadrato-cubus ipſius B Z, vnà cum plano-ſolido ab eiuſdem B Z, cubo, in quadratum A B, æquabitur plano-ſolido abs quadrato Z Y, in cubum A B. Innoteſcit igitur ignota quantitas, nempè B Z, vtpotè illa, cuius quadrato cubus, vnà cum plano-ſolido ab eiuſdem B Z cubo, in quadratum A B, æqualis eſt plano-ſolido abs Z Y, hoc eſt B X, quadrato, in cubum ipſius A B. Propoſitæ igitur æquationis radix erit B Z, cùm eius quadrato-cubus, vnà cum plano-ſolido ab eiuſdem cubo in quadratum A B, æqualis ſit plano-ſolido ex Z Y, hoc eſt B X, quadrato, in cubum A B, dato comparationis homogeneo.

Huiuſmodi lineæ parallela intelligitur occurrere lineæ inixtæ deſcriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur eſt Geneſis nonæ Lineæ ex ijs, quas adinueni, quaſque Mediceas appello.

Ad primum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

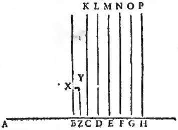
DECIMA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$a^5 + b a^4 = b^4 d.$$

DEcima Linearum Medicearum eſt, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus ſit ſatis per æquationem, in qua Quadrato-cubus afficitur adiunctione plano-ſolidi ſub quadrato-quadrato, dataque coefficiente longitudine.

Sit igitur æquatio $a^5 + b a^4 = b^4 d$, *ad quam analyſis conduxit, vt ea explicata, Geometrica effectio, dictante Poriſmate, comparetur. Reſoluta in analogiſmum, vt par eſt, ſit vt* $a^4 + b a^3$ *ad* b^4, *ita d, ad a.*



Expoſita ſit recta A B, quæ ſit coefficiens longitudo ſubquadrato-quadratica, eaque intelligatur in infinitum ad partes B, protracta, & in hac ipſa protracta ſumantur qualeſcunque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares, Deindè quadrato-quadratum ipſius A B, reſoluatur in longitudinem α; mox verò quadrato-quadratum B C, reſoluatur in longitudinem β, & plano-planum ſub cubo B C, & longitudine A B, reſoluatur in longitudinem γ; item quadrato-quadratum B D, in longitudinem δ; & plano-planum ſub B D, cubo, & longitudine A B, in longitudinem ϵ, & ſic de reliquis; vt autem α ad β, plus γ, ita fiat B C, ad ſegmentum ipſius C K; & vt α, ad δ, plus ϵ, ità fiat B D, ad ſegmentum ipſius D L, & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum ſegmentorum, quorum initia ſunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea; hæc illa eſt, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim ſit, vt α ad β plus γ, ità B C, ad ſegmentum ipſius C K, erit conuertendo vt β plus γ ad α, hoc eſt quadrato-

qua-

quadratum B C, plus plano-plano à cubo eiuſdem B C, in longitudinem A B, ad quadrato-quadratum A B, ità ſegmentum ipſius C K, ad B C; erit ob id plano-ſolidum factum abs B C, in plano planum conſtans quadrato-quadrato B C, & plano plano ex cubo B C, in longitudinem A B, hoc eſt quadrato-cubus ipſius B C, plus plano-ſolido abs quadrato-quadrato B C, in longitudinem A B, æqualis plano-ſolido abs ſegmento ipſius C K, in quadrato-quadratum A B; & quadrato-cubus B D, vnà cum plano-ſolido à quadrato-quadrato eiuſdem B D, in longitudinem A B, æquabitur plano-ſolido abs ſegmento ipſius D L, in quadrato-quadratum A B; & ità deinceps. Huiuſmodi igitur indolis eſt linea prædicta, vt ſi ex quocunque puncto, ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens prædictæ lineæ in puncto Y, erit vt quadrato-quadratum B Z, vnà cum plano-plano abs cubo B Z, in longitudinem A B, ad quadrato-quadratum A B, ita Z Y, ad B Z; atque adeò quadrato-cubus ex B Z, vnà cum plano-ſolido ex quadrato-quadrato B Z, in longitudinem A B, æquabitur plano-ſolido abs Z Y, ſeu B X, in quadrato-quadratum A B, & ſic de reliquis. Quamobrem ſi coefficiens longitudo ſubquadrato-quadratica fuerit A B, & in perpendiculari ex puncto B, ſecetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in quadrato-quadratum A B facit comparationis homogeneum; & ex puncto X agatur X Y, parallela ipſi A H, ex puncto autem Y, cadat perpendicularis Y Z, plano-ſolidum factum abs B Z, in plano-planum conſtans quadrato-quadrato B Z, & plano-plano abs cubo B Z, in longitudinem A B, hoc eſt quadrato-cubus ipſius B Z, vnà cum plano-ſolido abs quadrato-quadrato eiuſdem B Z, in longitudinem A B, æquabitur plano-ſolido abs Z Y, hoc eſt B X, in quadrato-quadratum A B. Innoteſcit igitur ignota quantitas, nempè B Z, vtpotè illa, cuius quadrato-cubus, vnà cum plano-ſolido abs quadrato-quadrato eiuſdem B Z, in longitudinem A B, æquatur plano-ſolido abs Z Y, ſeu B X, in quadrato-quadratum A B. Propoſitæ igitur æquationis radix eſt B Z, &c.

Huiuſmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ deſcriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur eſt Geneſis decimæ Lineæ ex ijs, quas adinueni, quaſque Mediceas appello.

Secundum Genus Linearum MEDICEARVM, *& ad huiuſmodi genus pertinentium,*

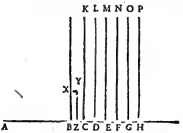
PRIMA

Pro Effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit

$$a^2 - ba = z^2.$$

DEcima prima Linearum Medicearum eſt, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit ſatis per æquationem in qua quadratum afficitur multa plani ſublatere, dataque coefficiente longitudine; Etſi autem idem circuli beneficio conſequi liceet, ob eam tamen, quam attulimus cauſam de prima differentes linea placet hanc pariter adſciſcere.

Sit igitur æquatio $a^2 - ba = z^2$, ad quam Analyſis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio dictante Poriſmate, comparetur. Reſoluta in analogiſmum, vt par eſt fit, vt $a - b$ ad z, ita z ad a.



Expoſita ſit recta A B, coefficiens longitudo, & in hac ad partes B, in infinitum protracta acceptæ ſint qualeſcumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ità deinceps. Ex punctis verò B, C, D, E, F, G, H, perpendicularibus erectis, fiat vt A C, ad ſegmentum ipſius C K, ità prædictum ſegmentum eiuſdem C K, ad B C, & vt A D, ad ſegmentum ipſius D L, ità hoc idem ſegmentum ad B D, & vt A E, ad ſegmentum ipſius E M, ita hoc idem ſegmentum ad B E, & vt A F, ad ſegmentum ipſius F N, ita hoc idem ſegmentum ad F B, & vt A G, ad ſegmentum ipſius G O; ita hoc idem ſegmentum ad B G, & vt A H, ad ſegmentum ipſius H P, ità hoc idem ſegmentum ad B N, &

N, & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum ſegmentorum, quorum initia ſunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea, hæc illa eſt, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim ſit vt A C, ad ſegmentum ipſius C K, ita hoc idem ſegmentum ad C B, & vt A D, ad ſegmentum ipſius D L, ità hoc idem ſegmentum ad D B, & ſic de reliquis, rectangulum A C B, æquabitur quadrato ſegmenti ipſius C K, & rectangulum A D B, æquabitur quadrato ſegmenti ipſius D L, &c. Sed rectangulum A C B, eſt æquale quadrato A C, minus rectangulo C A B; ergo quadratum A C, minus rectangulo C A B, æquabitur quadrato ſegmenti ipſius C K, & quadratum A D, minus rectangulo D A B, æquabitur quadrato ſegmenti ipſius D L, & ità deinceps. Huiuſmodi igitur Indolis eſt linea prædicta, vt ſi ex quocumq; puncto, ex. gr. Z, perpendicularis quædam erigatur Z Y, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, quadratum A Z, minus rectangulo Z A B, æquale ſit quadrato Z Y. Quamobrem ſi coefficiens longitudo fuerit A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B ſecetur B X, æqualis rectæ, quæ poſſit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallela ipſi A H, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z, quadratum A Z, minus rectangulo Z A B, æquabitur quadrato Z Y, ſeu B X. Innoteſcit igitur ignota quantitas, nempè A Z, vtpotè illa, cuius quadratum minus rectangulo ſub eadem, dataque coefficiente longitudine A B, æquale eſt quadrato B X, dato comparationis homogeneo. Propoſitæ igitur æquationis radix eſt B Z, &c.

Huiuſmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ deſcriptæ, in puncto Y.

Hæc itaque eſt Geneſis Lineæ Decimæ Primæ ex ijs, quas adinueni, quaſque Mediceas appello.

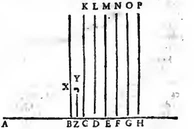
Ad Secundum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

SECVNDA

Pro Effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit
$a^3 - b^2 a = b^2 d$.

DEcima ſecunda Linearum Medicearum eſt, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit ſatis per æquationem, in qua cubus multa multa ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano.

Sit igitur æquatio $a^3 - b^2 a = b^2 d$, ad quam Analyſis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio dictante Poriſmate compareatur; Reſoluta in analogiſmum, vt par eſt, fit vt $a^2 - b^2$ ad b^2, ita d ad a.



Expoſita ſit recta A B, cuius quadratum ſit coefficiens planum ſublaterale, & in ea ad partes B, in infinitum protracta, ſumantur qualeſcumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; Fiat autem vt quadratum A B, ad exceſſum, quo idem quadratum ſuperatur à quadrato A C, ità A C, ad ſegmentum ipſius C K, & vt quadratum A B, ad exceſſum, quo idem quadratum ſuperatur à quadrato A D, ità fiat A D, ad ſegmentum ipſius D L; & vt quadratum A B, ad exceſſum, quo idem quadratum A B, ſuperatur à quadrato A E, ità fiat A E, ad ſegmentum ipſius E M; & vt quadratum A B, ad exceſſum, quo idem quadratum ſuperatur à quadrato A F, ità A F, ad ſegmentum ipſius F N; & vt quadratum A B, ad exceſſum, quo idem quadratum ſuperatur à quadrato A G, ità A G, ad ſegmentum ipſius G O; & vt quadratum A B, ad exceſſum, quo idem quadratum ſuperatur à quadrato A H, ità A H, ad ſegmentum ipſius H P, & ita deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum ſegmentorum, quorum initia ſunt B, C, D, E, &c. intelligatur ducta quædam Linea, hæc illa

illa eſt, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim ſit, vt quadratum A B, ad exceſſum, quo idem quadratum ſuperatur à quadrato A C, ità A C ad ſegmentum ipſius C K; erit conuertendo, vt quadratum A C, minus quadrato A B, ad quadratum A B, ità ſegmentum ipſius C K, ad A C: quamodrem ſolidum ſub A C, in quadratum A C, minus quadrato A B; hoc eſt cubus ex A C, minus ſolido ab eadem A C, in quadratum A B, æquabitur ſolido abs ſegmento ipſius C K, in quadratum A B: & cubus ex A D, minus ſolido ab eadem A D, in quadratum A B, æquabitur ſolido abs ſegmento ipſius D L, in idem quadratum A B, & ità deinceps. Huiuſmodi igitur indolis eſt linea prædicta; vt ſi ex quocumque puncto, exempli gratia Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens iam dictæ lineæ in puncto Y, quadratum A Z, minus quadrato A B, ad quadratum A B, habeat rationem, vt Z Y, ad A Z; atque adeò ſolidum factum abs A Z, in planum, quo quadratum A B, ſuperatur à quadrato A Z, hoc eſt cubus ex A Z, minus ſolido ex A Z, in quadratum A B, æquabitur ſolido facto abs Z Y, in quadratum A B, & ſic de reliquis; Quamobrem ſi coefficiens planum fuerit quadratum rectæ A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B, ſecetur B X, quæ ducta in quadratum A B, facit comparationis homogeneum; & ex puncto X agatur X Y, parallela ipſi A H, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z, ſolidum factum abs A Z, in planum, quo quadratum A B, ſuperatur à quadrato A Z, hoc eſt cubus A Z, minus ſolido ab eadem A Z, in quadratum A B, æquabitur ſolido abs Z Y, in quadratum A B. Innoteſcit igitur ignota quantitas, nempè A Z, vtpotè illa, cuius cubus multatus ſolido ab eadem A Z, in quadratum A B, æqualis eſt ſolido abs Z Y, in quadratum A B. Propoſitæ igitur æquationis radix eſt A Z, cùm eius cubus &c.

Huiuſmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ deſcriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur eſt Geneſis Decimæ ſecundæ Lineæ ex ijs, quas adinueni, quaſque Mediceas appello

Ad ſecundum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

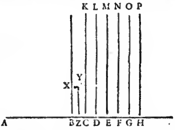
TERTIA

Pro effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$a^3 - b a^2 = b^2 d.$$

Decima tertia Linearum Mediceearum eſt, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit ſatis per æquationem, in qua Cubus afficitur multa ſolidi ſub quadrato, dataque coefficiente longitudine.

Sit igitur æquatio $a^3 - b a^2 = b^2 d$, *ad quam Analyſis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio dictante Poriſmate compareetur. Reſoluta in analogiſmum, vt par eſt, fit vt* $a^2 - b a$, *ad* b^2, *ità d ad a.*



Expoſita ſit recta A B, coefficiens longitudo ſubquadratica, & in ea ad partes B, protracta in infinitum ſumantur qualeſcumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; Fiat verò vt quadratum A B, ad exceſſum, quo rectangulum C A B, ſuperatur à quadrato A C, ita A C, ad ſegmentum ipſius C K; & vt quadratum A B, ad exceſſum, quo rectangulum D A B, ſuperatur à quadrato A D, ità A D, ad ſegmentum ipſius D L; & vt quadratum A B, ad exceſſum, quo rectangulum E A B, ſuperatur à quadrato A E, ità A E, ad ſegmentum ipſius E M; & vt quadratum A B, ad exceſſum quo rectangulum F A B ſuperatur à quadrato A F, ità A F, ad ſegmentum ipſius F N; & vt quadratum A B, ad exceſſum, quo rectangulum G A B, ſuperatur à quadrato A G,

D ità

ità A G, ad ſegmentum ipſius G O; & vt quadratum A B, ad exceſſum, quo rectangulum H A B, ſuperatur à quadrato A H, ita A H, ad ſegmentum ipſius H P, & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum ſegmentorum quorum initia ſunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea; Hæc illa eſt, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim ſit vt quadratum A B, ad exceſſum, quo rectangulum C A B, ſuperatur à quadrato A C, ita A C, ad ſegmentum ipſius C K; erit conuertendo, vt exceſſus, quo quadratum A C, ſuperat rectangulum C A B, ad quadratum A B, ità ſegmentum ipſius C K, ad A C; & ſic de reliquis; quamobrem ſolidum abs A C, in exceſſum, quo quadratum A C, ſuperat rectangulum C A B, hoc eſt in quadratum A C, minus rectangulo C A B, hoc eſt cubus ipſius A C, minus ſolido ſub A B, in quadratum eiuſdem A C, æquabitur ſolido abs ſegmento ipſius C K, in quadratum ipſius A B, & cubus ex A D, minus ſolido ſub A B, in quadratum ipſius A D, æquabitur ſolido abs ſegmento ipſius D L, in quadratum eiuſdem A D, & ità deinceps. Huiuſmodi igitur Indolis eſt Linea prædicta, vt ſi ex quocumque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ iam dictæ in puncto *T*, ſit quadratum A Z, minus rectangulo Z A B, ad quadratum A B, vt Z *T*, ad A Z; atque adeò ſolidum factum abs A Z, in exceſſum, quo quadratum A *Z*, ſuperat rectangulum *Z* A B, hoc eſt cubus A *Z*, minus ſolido A B, in quadratum A *Z*, æquabitur ſolido facto abs *Z T*, in quadratum A B, & ſic de reliquis. Quamobrem ſi coefficiens longitudo ſubquadratica fuerit recta A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B ſecetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in quadratum A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X *T*, parallela ipſi A H, occurrens lineæ iam dictæ in puncto *T*, ex puncto verò *T*, cadat perpendicularis Y *Z*, ſolidum abs A *Z*, in exceſſum, quo quadratum A *Z*, ſuperat rectangulum *Z* A B, hoc eſt cubus ex A *Z*, minus ſolido ab eiuſdem A *Z*, quadrato, in longitudinem A B, æquabitur ſolido abs *Z T*, quadratum A B; Innoteſcit igitur ignota quantitas, nempè A *Z*, vtpotè illa, cuius cubus, minus ſolido ab eiuſdem *A Z*, quadrato in longitudinem *A* B, æqualis eſt ſolido abs Z Y; in quadratum *A* B; Propoſitæ igitur æquationis radix erit *A Z*, cùm eius cubus, &c.

Huiuſmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ deſcriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur eſt Geneſis Decimæ tertiæ Lineæ ex ijs, quas adinueni, quaſque Mediceas appello,

Ad ſecundum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

QVARTA

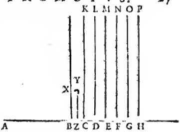
Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$a^4 - b^3 a = b^3 d.$$

DEcima Quarta Medicearum Linearum eſt, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus ſit ſatis per æquationem, in qua Quadrato-quadratum afficitur multa plano-plani ſub latere, datoque coefficiente ſolido.

Sit igitur æquatio $a^4 - b^3 a = b^3 d$, *ad quam Analyſis conduxit, vt ea explicata Geometrica Effectio, dictante Poriſmate, comparetur. Reſoluta in Analogiſmum, vt par eſt; ſit vt* $a^3 - b^3$, *ad* b^3, *ita* d *ad* a,

Expoſita



Expoſita ſit recta A B, cuius cubus ſit coefficiens ſolidum ſublaterale, & in ea ad ad partes B, in infinitum; protracta ſumantur qualeſcumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; Fiat autem vt cubus A B, ad exceſſum, quo cubus idem ſuperatur à cubo A C, ità A C, ad ſegmentum ipſius C K, & vt cubus A B, ad exceſſum, quo cubus idem ſuperatur à cubo AD, ità AD, ſegmentum ipſius D L; & vt cubus A B, ad exceſſum, quo idem cubus ſuperatur à cubo A E, ita A E, ad ſegmentum ipſius E M, & vt cubus A B, ad exceſſum quo idem cubus ſuperatur à cubo A F, ità A F, ad ſegmentum ipſius F N; & vt cubus A B, ad exceſſum, quo idem cubus ſuperatur à cubo A G, ità A G, ad ſegmentum ipſius G O, & vt cubus A P, ad exceſſum, quo idem cubus ſuperatur à cubo A H, ita A H, ad ſegmentum ipſius H P; & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum ſegmentorum, quorum initia ſunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea, hæc illa eſt, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim ſit vt cubus A B, ad exceſſum, quo idem cubus ſuperatur à cubo A C, ità A C, ad ſegmentum ipſius C K; erit conuertendo, vt huiuſmodi exceſſus, quo ſcilicet cubus A C, ſuperat cubum A B, ad cubum A B, ità ſegmentum ipſius C K, ad A C; quapropter plano-planum factum abs A C, in ſolidum, quod eſt exceſſus, quo cubus A C, ſuperat cubum A B, hoc eſt quadrato-quadratum ipſius A C, minus plano-plano ex A C, in cubum A B, æquabitur plano plano ab ſegmento ipſius C K, in cubum A B, & quadrato-quadratum ex A D, minus plano-plano ab eadem A D, in cubum A B, æquabitur plano-plano abs ſegmento ipſius D L, in cubum A B, & ità deinceps. Huiuſmodi igitur indolis eſt linea prædicta, vt ſi ex quocumque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, erit vt cubus A Z, minus cubo A B, ad cubum A B, ità Z Y ad A Z; atque adeò quadrato-quadratum A Z, minus plano-plano ab eadem A Z, in cubum A B, æquale erit plano-plano abs Z Y, in cubum A B; & ità de reliquis; Quamobrem ſi coefficiens ſolidum ſublaterale fuerit cubus A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B, ſecetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in cubum A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X, agatur X Y, parallela ipſi A H, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z, plano-planum factum ab A Z, in ſolidum, quod eſt exceſſus, quo cubus A Z, ſuperat cubum A B, hoc eſt quadrato-quadratum ipſius A Z, minus plano-plano ab A Z, in cubum A B, æquabitur plano-plano abs Z Y, hoc eſt B X, in cubum A B. Innoteſcit igitur ignota quantitas, nempè A Z, vtpotè illa, cuius quadrato-quadratum minus plano-plano ab eadem A Z, in cubum A B, æquale eſt plano-plano ab Z Y, hoc eſt B X, in cubum A B. Propoſitæ igitur æquationis radix eſt A Z, cum eius quadrato-quadratum, &c.

Huiuſmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ deſcriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur eſt Geneſis lineæ decimæquartæ ex ijs, quas adinueni, quaſque Mediceas appello.

Ad ſecundum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

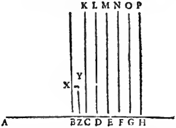
QVINTA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$a^4 - b a^3 = b^3 d.$$

DEcima quinta Linearum Medicearum eſt, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit ſatis per æquationem, in qua Quadrato-quadratum afficitur multa plano-plani ſub cubo, dataque coefficiente longitudine.

Sit igitur æquatio $a^4 - b a^3 = b^3 d$, ad quam analyſis conduxit, vt ea explicata, Geometrica effectio, dictante Poriſmate, comparetur. Reſoluta in analogiſmum, vt par eſt, fit vt $a^3 - b a^2$ ad b^3, ita d ad a.



Expoſita ſit recta A B, coefficiens longitudo ſubcubica, & in ea ad partes B, in infinitum protracta, ſumantur qualeſcumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; fiat autem vt cubus A B, ad exceſſum, quo ſolidum à quadrato A C, in A B, longitudinem, ſuperatur à cubo ipſius A C, ità A C, ad ſegmentum ipſius C k, & vt cubus A B, ad exceſſum, quo ſolidum à quadrato A D, in longitudinem A B, ſuperatur à cubo ipſius A D, ità A D, ad ſegmentum ipſius D L, & vt cubus A B, ad exceſſum, quo ſolidum à quadrato A E, in longitudinem A B; ſuperatur à cubo ipſius A E, ità A E, ad ſegmentum in E M, & vt cubus A B, ad exceſſum, quo ſolidum à quadrato A F, in longitudinem A B, ſuperatur à cubo A F, ità A F, ad ſegmentum ipſius F N, & vt cubus A B, ad exceſſum, quo ſolidum à quadrato A G, in longitudinem A B, ſuperatur à cubo A G, ità A G, ad ſegmentum ipſius G O, & vt cubus A B, ad exceſſum, quo ſolidum à quadrato A H, in longitudinem A B, ſuperatur à cubo A H, ità A H, ad ſegmentum ipſius H P, & ita deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum ſegmentorum, quorum initia ſunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea; Hæc illa eſt, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim ſit, vt cubus A B, ad exceſſum, quo ſolidum à quadrato A C, in longitudinem A B, ſuperatur à cubo A C, ità A C, ad ſegmentum ipſius C K, erit conuertendo, vt huiuſmodi exceſſus, quo cubus A C, ſuperat ſolidum à quadrato A C, in longitudinem A B, ad cubum A B, ità ſegmentum ipſius C K, ad A C, quapropter plano-planum factum ab A C, in ſolidum, quod eſt exceſſus, quo cubus A C, ſuperat ſolidum à quadrato A C, in longitudinem A B, hoc eſt quadrato-quadratum ipſius A C, minus plano-plano à cubo A C, in longitudinem A B, æquabitur plano-plano abs ſegmento ipſius C K, in cubum A B, & quadrato-quadratum ex A D, minus plano-plano à cubo A D, in longitudinem A B, æquabitur plano-plano abs ſegmento ipſius D L, in cubum A B, & ità deinceps. Huiuſmodi igitur indolis eſt Linea prædicta, vt ſi ex quocumque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, ſit vt cubus A Z, minus ſolido à quadrato eiuſdem A Z, in longitudinem A B, ad cubum A B, ità Z Y, ad A Z, atque adeò quadrato-quadratum A Z minus plano-plano à cubo A Z, in longitudinem A B, æquale ſit plano-plano ab Z Y, in cubum A B; & ſic de reliquis. Quamobrem ſi coefficiens longitudo ſubcubica fuerit A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B, ſecetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in cubum A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallela ipſi A H, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z; plano-planum factum abs A Z, in exceſſum, quo cubus A Z, ſuperat ſolidum à quadrato eiuſdem A Z, in longitudinem A B, hoc eſt quadrato-quadratum eiuſdem A Z, minus plano-plano à cubo ipſius A Z, in longitudinem A B, æquabitur plano-plano abs Z Y, hoc eſt B X, in cubum A B. Innoteſcit igitur ignota quantitas, nempè A Z, vtpotè illa, cuius quadrato-quadratum minus plano-plano à cubo ipſius A Z, in longitudinem A B, æquale eſt plano-plano abs Z Y, hoc eſt B X, in cubum A B. Propoſitæ igitur æquationis radix erit A Z, cùm eius quadrato-quadratum minus, &c.

Huiuſmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ deſcriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur eſt Geneſis Lineæ Decimæquintæ ex ijs, quas adinueni, quaſque Mediceas appello,

Ad ſecundum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

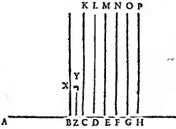
SEXTA

Pro Effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit

$$a^4 - b^2 a^2 = b^3 d.$$

DEcima ſexta Linearum Medicearum eſt, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit ſatis per æquationem, in qua Quadrato-quadratum afficitur multa plano-plani ſub plano, datoque coefficiente plano.

Sit igitur æquatio $a^4 - b^2 a^2 = b^3 d$, ad quam Analyſis conduxit, vt ea explicata, Geometrica effectio, dictante Poriſmate, comparetur. Reſoluta in analogiſmum, vt par eſt, fit vt $a^3 - b^2 a$ ad b^3, ità d, ad a.



Expoſita ſit recta A B, cuius quadratum ſit coefficiens planum ſubquadraticum, & in hac ad partes B, in infinitum protracta ſumantur qualeſcumque partes B C, B D, BE, BF, BG, BH, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erectis perpendicularibus, fiat, vt cubus A B, ad exceſſum, quo cubus A C, ſuperat ſolidum ab eadem A C, in quadratum A B, ità A C, ad ſegmentum ipſius C K; & vt cubus A B, ad exceſſum, quo cubus A D, ſuperat ſolidum ab eadem A D, in quadratum A B, ità A D, ad ſegmentum ipſius D L; & vt cubus A B, ad exceſſum, quo cubus A E, ſuperat ſolidum ab eadem A E, in quadratum A B, ità A E, ad ſegmentum ipſius E M, & vt cubus A B, ad exceſſum, quo cubus A F, ſuperat ſolidum ab eadem A F, in quadratum A B, ità A F, ad ſegmentum in F N, & vt cubus A B, ad exceſſum, quo cubus A G, ſuperat ſolidum ab eadem A G, in quadratum A B, ità A G, ad ſegmentum in G O, & vt cubus A B, ad exceſſum, quo cubus A H, ſuperat ſolidum ab eadem A H, in quadratum A B, ità A H, ad ſegmentum in H P, & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum ſegmentorum, quorum initia ſunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea; hæc illa eſt, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim ſit, vt cubus A B, ad exceſſum, quo cubus A C, ſuperat ſolidum ab eadem A C, in quadratum A B, ità A C ad ſegmentum ipſius C K, erit conuertendo vt huiuſmodi exceſſus, quo cubus A C, ſuperat ſolidum, ab eadem A C, in quadratum A B, ità ſegmentum ipſius C K, ad A C, quapropter plano-planum factum abs A C, in exceſſum quo cubus A C, ſuperat ſolidum ab eadem A C, in quadratum A B, hoc eſt quadrato-quadratum ipſius A C, minus plano-plano à quadrato eiuſdem A C, in quadratū A B, æquabitur plano-plano abs C K, in cubum A B; & quadrato-quadratum ex A D, minus plano-plano à quadrato eiuſdem A D, in quadratum A B, æquabitur plano-plano abs ſegmento ipſius D L, in cubum A B, & ità deinceps. Huiuſmodi igitur Indolis eſt Linea prædicta, vt ſi ex quocumque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ prædictæ in puncto Y ſit vt cubus A Z, minus ſolido ab eadem A Z, in quadratum A B; ad cubum A B, ità Z Y, ad A Z, atque adeò quadrato-quadratum A Z, minus plano-plano à quadrato eiuſdem A Z, in quadratum A B, æquabitur plano-plano abs Z Y, in cubum A B, & ſic de reliquis; quamobrem ſi ſubquadraticum coefficiens planum fuerit quadratum ipſius A B, & in perpendiculari ex puncto B, ſecetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in cubum A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X, agatur X Y, parallela ipſi A H, ex puncto verò Y cadat perpendicularis Y Z; plano-planum factum abs A Z, in exceſſum, quo cubus A Z, ſuperat ſolidum ab eadem A Z, in quadratum A B, hoc eſt quadrato-quadratum A Z, minus plano-plano à quadrato eiuſdem A Z, in quadratum A B, æquabitur plano-plano

Huiuſmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ deſcriptæ, in puncto Y.

no-plano

no-plano abs Z Y, hoc eſt B X, in cubum A B. Innoteſcit igitur ignota quantitas, nempè A Z, vtpotè illa, cuius quadrato-quad. minus plano-plano à quadrato eiuſdem A Z, in quadratum A B, æquale eſt plano-plano abs Z Y, hoc eſt B X, in cubum A B. Propoſitæ igitur æquationis radix erit A Z, cum eius quadrato-quadratum minus plano plano &c.

Hæc igitur eſt Geneſis Lineæ Decimaſextæ ex ijs, quas adinueni, quaſque Mediceas appello.

Ad ſecundum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

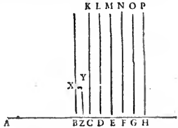
SEPTIMA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit.

$$a^5 - b^4 a = b^4 d.$$

DEcima ſeptima Linearum Medicearum eſt, quæ facit ad Geometricam effectionem Problematum, quibus fit ſatis per æquationem in qua Quadrato-cubus afficitur multa plano-ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano-plano.

Sit igitur æquatio $a^5 - b^4 a = b^4 d$, ad quam Analyſis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio dictante Poriſmate, comparetur. Reſoluta in analogiſmum, vt par eſt, fit vt $a^4 - b^4$ ad b^4, ita d ad a,



Expoſita ſit quædam recta A B, cuius quadrato-quadratum eſt coefficiens plano-planum ſublaterale, & in ea ad partes B, in infinitum protracta ſumantur quaſcumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erectis perpendicularibus; Fiat reſolutio quadrato-quadratorum in ſimplices longitudines, vt ſuo loco tradidimus, ſecundum poſitam quantitatem, & quidem quadrato-quadratum ex A C, reſolutum ſit in longitudinem α, & quadrato-quadratum A D, in longitudindem γ, quadrato-quadratum A E, in longitudinem δ; quadrato-quadratum A F, in longitudinem ϵ quadrato-quadratum A G, in longitudinem ξ quadrato-quadratum A H, in longitudinem η, & ſic deinceps. Quadrato-quadratum A B, reſolutum ſit in longitudinem β, deindè differentia inter α, & β, ſit μ, mox verò fiat, vt β, ad μ, ità A C, ad ſegmentum ipſius C K, & ita deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum ſegmentorum, quorum initia ſunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea: Hæc illa eſt, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim ſit, vt A C, ad ſegm. in C K, ità β, ad μ, ergo conuertendo erit, ſit μ, ad β, ità ſegm. in C K, ad A C, quapropter plano-ſolidum factum ab A C, in μ plano-planum, quo α ſuperat β, ſeu quadrato-quadr. A C, ſuperat quadrato-quadratum A B, hoc eſt quadrato-cubus ipſius A C, minus plano-ſolido ab eadem A C, in quadrato-quadratum ipſius A B, æquabitur plano-ſolido abs ſegmento ipſius C K, in quadrato-quadratum eiuſdem A B; & quadrato-cubus ex A D, minus plano-ſolido ab eadem A D, in quadrato-quadratum A B, æquabitur plano-ſolido abs ſegmento ipſius D L, in quadrato-quadratum eiuſdem A B, & ità deinceps. Huiuſmodi igitur indolis eſt linea prædicta, vt ſi ex quocumque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ prædictæ in puncto Y, erit vt quadrato-quadratum A Z, minus quadrato-quadrato A B, ad quadrato-quad. A B, ità Z Y, ad A Z; atque adeò quadrato-cubus A Z, minus plano-ſolido ab eadem A Z, in quadrato-quadratum A B, æquabitur plano-ſolido abs Z Y, in quadrato-quadratum A B, & ſic de reliquis. Si ergo coefficiens plano-planum ſublaterale fuerit quadrato-quad. ipſius A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B, ſecetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in quadrato-quadratum ipſius A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallela ipſi A H, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z: Plano-ſolidum

Huiuſmodi lineæ parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ deſcriptæ, in puncto Y.

factum

factum abs A Z, in exceſſum, quo quadrato-quadratum A Z, ſuperat quadrato-quadratum A *B*, hoc eſt quadrato-cubus ipſius A Z, minus plano-ſolido ab eadem A Z, in quadrato-quadratum A *B*, æquabitur plano-ſolido abs Z Y, hoc eſt *B* X, in quadrato-quadratum A *B*. Innoteſcit igitur ignota quantitas nempè A Z, vtpotè illa, cuius quadrato-cubus minus plano-ſolido ab eadem in quadrato-quadratum A *B*, æquabitur plano-ſolido abs Z Y, hoc eſt *B* X, in quadrato-quadratum A *B*. Propoſitæ igitur æquationis radix erit A Z, cùm eius quadrato-cubus minus plano-ſolido ab eadem in quadrato-quadratum A *B*, æqualis ſit plano-ſolido abs Z Y, ſeu *B* X, in quadrato-quadratum A *B*, dato comparationis homogeneo. Propoſitæ igitur æquationis radix eſt *A* Z, &c.

Hæc igitur eſt Geneſis Lineæ Decimæſeptimæ ex ijs, quas adinueni, quaſque Mediceas appello.

Ad Secundum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

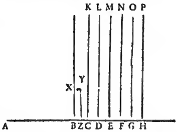
OCTAVA

Pro Effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit

$$a^5 - b^3 a^2 = b^3 d^2.$$

DEcima octaua Linearum Medicearum eſt, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit ſatis per æquationem in qua Quadrato-cubus afficitur multa plano-ſolidi ſub quadrato, datoque coefficiente ſolido.

Sit igitur æquatio $a^5 - b^3 a^2 = b^3 d^2$, *ad quam Analyſis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio dictante Poriſmate, compareiur. Reſoluta in analogiſmum, vt par eſt ſit, vt* $a^3 - b^3$ *ad* b^3, *ita* d^2 *ad* a^2.



Expoſita ſit recta A B, cuius cubus ſit coefficiens ſolidum ſubquadraticum, & in ea ad partes B, in infinitum protracta ſumantur qualeſcumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, erigantur perpendiculares; fiat autem vt cubus A B, ad exceſſum, quo cubus A C, ſuperat cubum A B, ità quadratum A C, ad quadratum ſegmenti ipſius C K, & vt cubus A B, ad exceſſum, quo cubus A D, ſuperat cubum A *B*, ità quadratum A D, ad quadratum ſegmenti ipſius D L; & vt cubus A B, ad exceſſum, quo cubus A E, ſuperat cubum A B, ità quadratum A E, ad quadratum ſegmenti ipſius E M; & vt cubus A B, ad exceſſum, A F, ſuperat cubum A B, ità quadratum A F; ad quadratum ſegmenti ipſius F N; & vt cubus A B, ad exceſſum, quo cubus A G, ſuperat cubum A B, ità quadratum A G, ad quadratum ſegmenti ipſius G O; & vt cubus A *B*, ad exceſſum, quo cubus A H, ſuperat cubum A B, ità quadratum A H, ad quadratum ſegmenti ipſius H P, & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum ſegmentorum, quorum extrema ſunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam Linea; hæc illa eſt, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cum enim ſit, vt cubus A B, ad exceſſum, quo cubus A C, ſuperat cubum A B, ità quadratum A C, ad quadratum ſegmenti ipſius C K, erit conuertendo, vt huiuſmodi exceſſus, quo cubus A C, ſuperat cubum A B, hoc eſt cubus A C, minus cubo A B, ad cubum A B, ità quadratum ſegmenti ipſius C K, ad quadratum A C, quapropter plano-ſolidum factum à quadrato A C, in exceſſum quo cubus A C, ſuperat cubum A B; hoc eſt quadrato-cubus ipſius A C, minus plano-ſolido à quadrato eiuſdem A C, in cubum A B, æquabitur plano-ſolido à quad. ſegmenti C K, in cubum A B; & quadrato-cubus ex A D, minus plano-ſolido à quadrato eiuſdem A D, in cubum A B, æquabitur plano-ſolido à quad. ſegmenti D L, in cubum A B, & ità deinceps. Huiuſmodi igitur indolis eſt linea prædicta,

vt ſi

vt ſi ex quocumque puncto, ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens prædictæ lineæ in puncto Y, erit vt cubus A Z, minus cubo A B, ad cubum A B, ita quadratum Z Y, ad quadratum A Z; atque adeò quadrato-cubus A Z, minus plano-ſolido à quadrato eiuſdem A Z, in cubum A B, æquabitur plano-ſolido abs quadrato Z Y, in cubum A B, & ſic de reliquis. Quamobrem ſi ſubquadraticum coefficiens ſolidum fuerit cubus ipſius A B, & in perpendiculari ex puncto B, ſecetur B X, æqualis rectæ, cuius quadratum ductum in cubum A B facit comparationis homogeneum; & ex puncto X agatur X Y, parallela ipſi A H, ex puncto autem Y, cadat perpendicularis Y Z, plano-ſolidum factum abs quadrato A Z, in exceſſum, quo cubus A Z, ſuperat cubum A B, hoc eſt quadrato-cubus ipſius A Z, minus plano-ſolido à quadrato eiuſdem A Z, in cubum A B, æquabitur plano-ſolido abs quadrato Z Y, hoc eſt quadrato B X, in cubum A B. Innoteſcit igitur ignota quantitas, nempè A Z, vtpotè illa, cuius quadrato-cubus minus plano-ſolido à quadrato eiuſdem A Z, in cubum A B, æquatur plano-ſolido abs quadrato Z Y, hoc eſt quadrato B X, in cubum A B. Propoſitæ igitur æquationis radix eſt A Z, &c.

Huiuſmodi linea paralle la intelligitur occurrere lineæ mixtæ deſcriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur eſt Geneſis decimæ octauæ Lineæ ex ijs, quas adinueni, quaſque Mediceas appello.

Ad ſecundum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

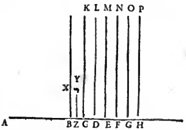
N O N A

Pro effectione Geometricà, cùm Æquatio fuerit

$$a^5 - b^2 a^3 = b^3 d^2.$$

DEccima noua Medicearum Linearum eſt, quæ facit ad Geometricam effectionem Problematum, quibus fit ſatis per æquationem, in qua Quadrato-cubus afficitur multa plano-ſolidi ſub cubo, datoque coefficiente plano.

Sit igitur æquatio $a^5 - b^2 a^3 = b^3 d^2$, ad quam analyſis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio dictante Poriſmate comparetur. Reſoluta in analogiſmum, vt par eſt, fit vt $a^3 - b\ a$, ad b^3, ità d ad a^2.



Expoſita ſit recta A B, cuius quadratum ſit coefficiens planum ſubcubicum, & in ea ad partes B, in infinitum protracta ſumantur qualeſcumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; Fiat autem vt cubus A B, ad exceſſum, quo cubus A C, ſuperat ſolidum ab eadem A C, in quadratum A B, ità quadratum A C, ad quadratum ſegmenti ipſius C K, & vt cubus A B, ad exceſſum, quo cubus A D, ſuperat ſolidum ab eadem A D, in quadratum A B, ità quadratum A D, ad quadratum ſegmenti ipſius D L, & vt cubus A B, ad exceſſum, quo cubus A E, ſuperat ſolidum ab eadem A E, in quadratum A B, ita quadratum A E, ad quadratum ſegmenti ipſius E M, & vt cubus A B, ad exceſſum, quo cubus A F, ſuperat ſolidum ab eadem A F, in quadratum A B, ita quadratum A F, ad quadratum ſegmenti ipſius F N, & vt cubus A B, exceſſum, quo cubus A G, ſuperat ſolidum ab eadem A G, in quadratum A B, ità quadratum A G, ad quadratum ſegmenti ipſius A O, & vt cubus A B, ad exceſſum, quo cubus A H, ſuperat ſolidum ab eadem A H, in quadratum A B, ita quadratum A H, ad quadratum ſegmenti ipſius H P, & ita deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum ſegmentum quorum initia ſunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea, hæc illa eſt, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim ſit vt cubus A B, ad exceſſum, quo cubus A C, ſuperat ſolidum ab eadem A C, in

quadra-

quadratum A B, ità quadratum A C, ad quadratum ſegmenti ipſius C K; erit conuertendo vt huiuſmodi exceſſus, quo cubus A C, ſuperat ſolidum ab eadem A C, in quadratum A B, hoc eſt cubus A C, minus ſolido ab eadem A C, in quadratum A B, ad cubum A B, ità quadratum ſegmenti ipſius C k, ad quadratum A C, quamobrem plano-ſolidum factum à quadrato A C, in cubum A C, minus ſolido ab eadem A C, in quadratum A B, hoc eſt quadrato-cubus ipſius A C, minus plano-ſolido ab ipſius A C, cubo in quadratum A B, æquabitur plano-ſolido abs ſegmento ipſius C K, quadrato in cubum A B, & quadrato-cubus ex A D, minus plano-ſolido ab eiuſdem A D, cubo in quadratum A B, æquabitur plano-ſolido à quadrato ſegmento ipſius D L, in cubum A B; & ità deinceps. Huiuſmodi igitur indolis eſt linea prædicta, vt ſi ex quocumque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ prædictæ in puncto Y, quadrato-cubus A Z, minus plano-ſolido ex cubo A Z, in quadratum A B, æqualis ſit plano-ſolido abs quadrato Z Y, in cubum A B, & ſic de reliquis. Quamobrem ſi coefficiens planum fuerit quadratum rectæ A B, & in perpendiculari, erecta ex puncto B, ſecetur B X, æqualis ei cuius quadratum ductum in cubum ipſius A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallala ipſi A H, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z, plano-ſolidum factum abs quadrato A Z, in cubum A Z, minus ſolido ab eadem A Z, in quadratum A B, hoc eſt quadrato-cubus ipſius A Z, minus plano-ſolido ab eiuſdem A Z, cubo in quadratum A B, æquabitur plano-ſolido abs quadrato Z Y, in cubum A B. Innoteſcit igitur ignota quantitas, nempè A Z, vtpotè illa, cuius quadrato-cubus minus plano-ſolido ab eiuſdem A Z, cubo in quadratum A B, æqualis eſt plano-ſolido abs Z Y, ſeu B X, quadrato in cubum ipſius A B. Propoſitæ igitur æquationis radix erit A Z, cùm eius quadrato-cubus minus plano-ſolido &c.

Huiuſmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ deſcriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur eſt Geneſis Decimæ nonæ Lineæ ex ijs, quas adinueni, quaſque Mediceas appello.

Ad Secundum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

DECIMA

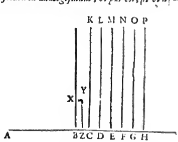
Pro Effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit

$$a^5 - b a^4 = b^4 d.$$

VIgeſima Linearum Mediccarum eſt, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus ſit ſatis per æquationem, in qua Quadrato-cubus afficitur multa plano-ſolidi ſub quadrato-quadrato, dataque coefficiente longitudine.

Sit igitur æquatio $a^5 - b a^4 = b^4 d$, ad quam Analyſis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio dictante Poriſmate comparetur; Reſoluta in analogiſmum, vt par eſt, ſit vt $a^5 - b a^4$ ad b^4, ita d ad a.

Expoſita ſit recta A B, coefficiens longitudo ſubquadratica, in qua ad partes B, in infinitum protracta ſumantur qualeſcumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; deindè quadrato-quadratum ipſius A B, reſoluatur in longitudinem α, mox verò quadrato-quadratum A C, reſoluatur in longitudinem β, & plano-planum ſub cubo A C, & longitudine A B, reſoluatur in longitudinem γ, item quadrato-quadratum A D, in longitudinem δ, & plano-planum ſub A D, cubo, & longitudine A B, in longitudinem ε, & ſic de reliquis. Vt autem α ad β minus γ, ità fiat A C, ad ſegmentum ipſius C K, & vt α ad δ, minus ε, ità fiat A D, ad ſegmentum in D L, , & ità deinceps.



Per puncta verò extrema prædictorum ſegmentorum, quorum initia ſunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea: hæc illa eſt, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim ſit vt α, a l β, minus γ, ita A C, ad ſegmentum ipſius C K, erit conuertendo, vt β, minus γ, ad α, hoc eſt quadrato-quadratum A C, minus plano plano ex cubo eiuſdem A C, in longitudinem A B, ad quadrato-quadratum A B, ita ſegmentum ipſius C K, ad A C, ob id plano-ſolidum factum abs A C, in exceſſum, quo quadrato-quadratum A C, ſuperat plano-planum à cubo eiuſdem A C, in longitudinem A B, hoc eſt quadrato-cubus ipſius A C, minus plano-ſolido à quadrato-quadrato A C, in longitudinem A B, æqualis eſt plano-ſolido abs ſegmento ipſius C K, in quadrato-quadratum A B, & quadrato-cubus AD, minus plano-ſolido à quadrato-quadrato eiuſdem AD, in longitudinem A B, æquabitur plano-ſolido abs ſegmento ipſius D L, in quadrato-quadratum A B; & ità deinceps. Huiuſmodi igitur Indolis eſt linea prædicta, vt ſi ex quocumque puncto ex gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, ſit vt quadrato-quadratum A Z, minus plano-plano abs cubo AZ, in longitudinem AB, &c. ad quadrato-quadratum A B, ita Z Y, ad A Z, quamobrem quadrato-cubus A Z, minus plano-ſolido à quadrato-quadrato A Z, in longitudinem A B, æquabitur plano-ſolido abs Z Y, ſeu B X, in quadrato-quadratum A B; Quamobrem ſi coefficiens longitudo ſubquadrato-quadratica fuerit A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B ſecetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in quadrato-quadratum A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallela ipſi A H, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z, plano-ſolidum factum ab A Z, in exceſſum, quo quadrato-quadratum A Z, ſuperat plano-planum à cubo eiuſdem A Z, in longitudinem A B, hoc eſt quadrato-cubus ipſius A Z, minus plano-ſolido à quadrato-quadrato eiuſdem A Z, in longitudinem A B, æquabitur plano-ſolido abs Z Y, hoc eſt B X, in quadrato-quadratum A B; Innoteſcit igitur ignota quantitas, nempè A Z, vtpotè illa, cuius quadrato-cubus minus plano-ſolido à quadrato-quadrato eiuſdem A Z, in longitudinem A B, æquatur plano-ſolido abs Z Y, ſeu B X, in quadrato-quadratum A B, &c.

Huiuſmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ deſcriptæ, in puncto Y,

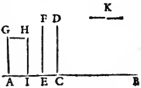
Hæc itaque eſt Geneſis Lineæ Vigeſimæ ex ijs, quas adinueni, quaſque Mediceas appello.

Tertium Genus Linearum MEDICEARVM, *& ad huiuſmodi genus pertinentium*

PRIMA

Pro Effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit

$$ba - a^2 = z^2.$$



DAta ſit coefficiens A B, & K, poſſit comparationis homogeneum. Diuidatur A B, biſariam in C, & ex C, erigatur perpendicularis C D, ea lege vt ſit quemadmodum A C, ad C D, ita C D, ad C B. Manifeſtum eſt rectangulum A C B, eſſe maximum omnium ad eandem rectam applicabilium deficentium quadrato; & defectum occupare reliquum dimidium lineæ. Itemque conſtat rectangulum A C B, æquale eſſe quadrato C D. Mox autem aſſumpto quouis puncto E; ex E, excitetur E F, ea lege vt ſit quemadmodum A E, ad E F, ita E F, ad E B. Et ſic deinceps procedatur aſſumptis alijs punctis in recta A B; & erectis perpendicularibus eodem modo per quarum extremitates intelligatur ducta quædam linea. Deinde ex A, excitata perpendiculari A G, quæ ſit æqualis ipſi K, quæ poteſt comparationis homogeneum & ex G, agatur G H, parallela ipſi A B, occurrens prædictæ lineæ in H, ex H, cadat H I, perpendicularis ad A B; Dico I B, eſſe propoſitæ æquationis Radicem; eſt enim rectangulum A I B, æquale quadrato H I, ſeu K, at verò rectangulum prædictum eſt idem quod rectangulum A B I, minus quadrato I B; quare rectangulum A B I, minus quadrato I B, æquale erit K, quadrato.

Hæc

Hæc autem linea cum circuli peripheria coincidit; eſt enim rectangulum A B I, minus quadrato I B, æquale rectangulo A I B; ſi igitur rectangulum A B I, minus quadrato I B, æquale eſt quadrato K, & rectangulum A B I, minus quadrato I B, æquale eſt rectangulo A I B, ergo rectangulum A I B, æquabitur quadrato K, ſeu A G, ſeu I H; & quoniam idem contingit de omnibus rectis excitatis ex ſingulis punctis rectæ A B, propterea linea A D B, circuli peripheria erit.

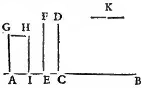
Hoc idem intelligi poteſt de A I, rectangulum enim B A I, minus quadrato A I, æquale eſt rectangulo A I B, &c.

Ad tertium genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

SECVNDA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit.

$$b a^2 - a^3 = b^2 d.$$



Data ſit coefficiens A B, & K, ſit recta, cuius cubus æqualis ſit comparationis homogeneo. Secetur autem ipſa A B, in C, itaut A C, ſit tertia pars ipſius A B. Excitetur ex C, recta quæpiam C D; ita, vt ſit quemadmodum A C, ad C D, ita quadratum C D, ad quadratum C B, Manifeſtum eſt maximum ſolidum eſſe, quod applicatur alicui lineæ deficiens cubo, eſſe inquam id, quod tertiæ parti datæ lineæ applicatur, & cubus adiacet duabus tertijs partibus datæ rectæ. Quamobrem ſolidum ſub altitudine A C, & ſub quadrato C B, omnium applicabilium ad rectam A B, defficientium cubo ex C B, erit maximum. Conſtat itidem ſolidum prædictum æquale eſſe cubo ex C D.

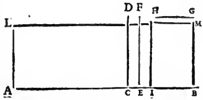
Deinde ſumatur punctum E; & fiat, vt A E, ad E F, ita quadratum E F, ad quadratum E B. Non diſſimiliter procedatur deinceps acceptis alijs punctis in A B, & excitatis ad eam perpendicularibus, per quarum extrema intelligatur ducta linea quædam, quæ hoc pacto deſcripta erit per puncta continuata. Deinde ad extremitatem A, excitetur perpendicularis A G, æqualis K, agaturque G H, parallela ipſi A B, occurrens lineæ iam deſcriptæ in H, & ex H, cadat H I, perpendicularis ad A B. Dico I B, eſſe æquationis radicem. Solidum enim ſub A B, coefficiente, & quadrato I B, minus cubo eiuſdem I B, hoc eſt ſolidum ſub altitudinem A I, & quadrato I B, æquale eſt cubo I H, ſeu A G, hoc eſt K. Quod oportebat &c.

Ad tertium genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

TERTIA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$b^2 a - a^3 = b^2 d.$$



Datum ſit planum A L M B, cuius latus vnum A B, aliud B M, ſecetur A B, in C, vt C B, ſit tertia pars totius A B, igitur vel C B, tertia pars eſt æqualis B M, vel inæqualis. Si fuerit inæqualis, Quandoquidem vtcunque ſe habeat certè ſegmentum C M, tertia pars eſt totius M A, reperiatur recta quæ poſſit ipſum planum C M, & ad hanc applicetur totum A M, con-

ſurget enim latus A B, triplum rectæ potentis C M, tertiam partem totius A M. Ex puncto C, excitetur C D, itaut ſit quemadmodum L C, duæ tertiæ partes totius A M, ad quadratum C D, ita C D, ad C B. Manifeſtum eſt maximum ſolidum omnium applicabilium dato plano deſficientium cubo, eſſe id, quod applicatur duabus tertijs partibus dati plani. Quare ſolidum prædictum erit maximum, nempè contentum ſub plano L C, & altitudine C B.

Conſtat præterea cubum C D, prædicto ſolido æqualem eſſe.

Sumatur in A B, quoduis aliud punctum E, & ex E, excitetur E F, itaut quemadmodum eſt planum A M, minus quadrato E B, ad quadratum E F, ita ſit latus E F, ad latus E B, & ſic procedatur deinceps aſſumptis in A B, alijs punctis, & excitatis rectis perpendicularibus ad illam; per quarum extrema intelligatur ducta linea quædam, & ex B, excitetur B G, cuius cubus æqualis ſit comparationis homogeneo; agatur G H, parallela ipſi A B; & ex H, cadat H I. Dico I B, eſſe radicem æquationis propoſitæ. Eſt enim ſolidum ſub plano A M, minus quadrato I B, & altitudine I B, æquale cubo ex I H. At ſolidum prædictum idem eſt, quod ſolidum ſub plano L B, & altitudine I B, minus cubo ex I B, ergo ſolidum ſub plano L B, & altitudine I B, minus cubo ipſius I B, æquabitur cubo ex I H, ſeu ex B G; hoc eſt dato ſolido comparationis homogeneo.

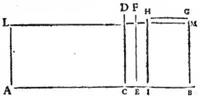
SCHOLION.

Suſpicabitur quiſpiam, neceſſe eſſe, vt A L, æqualis ſit I B. Sed immeritò, cum enim fieri debeat applicatio ſolidi ad planum, id non requiritur, niſi cum eſt inueniendum maximum ſolidorum applicabilium, tunc enim, punctum C eſt inter A B, itaut C B, debeat eſſe æqualis A L, ſeu B M; ſi nimirum ſolidum applicari debeat plano, itaut ſit deſficiens cubo; in reliquis punctis inter C B, id non requiritur. Quando igitur C B, tertia pars totius A B, non eſt æqualis B M, fieri debet æqualis, vt ſolidi altitudo nempè C B, cum fuerit æqualis B M, latitudini baſeos, fiat cubus eiuſdem altitudinis cum ſolido. At cum deinde nos deſcribendo lineam ſumimus puncta in linea A B, vt puta E, atque facimus vt exceſſus plani A M, ſupra quadratum E B, ad quadratum cuiuſdam lineæ, nempe E F, ita hæc ipſa linea ad ſegmentum E B, & ſic in alijs acceptis punctis deinceps in eadem linea C B, Manifeſtum eſt factum eſſe quod oportet; Quandoquidem ſupponamus factum eſſe exceſſum, quo A M, planum ſuperat quadratum E B, ad quadratum alicuius lineæ, vt E F, ita hæc ipſa linea ad ſegmentum E B; atque erecta perpendiculari E F, & ſic de alijs erectis à punctis in C B, per earum linearum extrema intelligatur ducta linea D F H B, ad extremum B, erecta ſit perpendicularis B G, quæ ſit latus cubi æqualis dato ſolido, ducta autem G H, parallela ipſi A B, vt occurrat mixtæ lineæ in H; ex H, cadat perpendicularis H I; Dico ſolidum ſupra planum A M, & ſub altitudine I B, minus cubo eiuſdem I B, æquale eſſe ſolido, cui eſt æqualis cubus ex B G. Quandoquidem factus eſt exceſſus plani A M, ſupra quadratum E B, ad quadratum lineæ E F, vt eadem linea, ad ſegmentum E B, & ſic de omnibus alijs lineis, ductis perpendiculariter ab omnibus punctis in C B, erit vt exceſſus plani A M, ſupra quadratum I B, ad quadratum lineæ I H, ità I H, ad I B, quare ex Elementis, ſolidum cuius altitudo eſt I B, baſis autem eſt exceſſus plani A M, ſupra quadratum I B, æquale erit cubo ex I H, ſeu B G, hoc eſt ſolido dato. Sed ſolidum cuius altitudo eſt I B, baſis verò eſt exceſſus plani A M, ſupra quadratum I B, eſt æquale ſolido, cuius baſis eſt planum A M, altitudo I B, minus cubo ex I B, ergo ſolidum cuius baſis eſt planum A M, altitudo autem I B, minus cubo eiuſdem I B, æquale eſt ſolido dato; Quod erat operæ pretium &c.

Illuſtriſs. Signor mio Padron Colendiſs.

Finalmente auendo fatto refleſſione à quel tanto, che V. S. mi ſignificò con la ſua corteſiſſima del dì 15. Nouembre del 1664. in propoſito di quella mia Dimoſtrazione Geometrica, & il tutto conferito con qualche Profeſſore, ſi è concluſo, che la dimoſtrazione non à difetto alcuno; e perche V. S. ne rimanga accertato, e neceſſario, ch'ella aſcolti queſte poche coſe.

Digitized by Google



Sia dato il piano A L M B, e ſia rettengolo, del cui vn lato ſia A B, e l'altro B M. Segaſi A B, in C; ſi che C B, ſia terza parte di tutto l' A B.

Hor dunque ò il C B, e vguale al B M, ò e diſuguala; ſe gli è diſuguale il ſegmento C M, è la terza parte di tutto l' A M, ſi ritroui vna retta, che poſſi eſſo piano C M, & à queſta ſi applichi il piano tutto A M, e ne verrà vn lato, che ſarà triplo della retta potente C M, terza parte di tutto l' A M. Dal punto C, s'eciti la retta C D; di modo che ſia come L C, due terze parti di tutto l' A M, al quadrato C D, coſi il C D, al C B. E manifeſto, che il ſolido contenuto dalla baſe L C, e dall'altezza C B, e il maſſimo, percioche. Omnium ſolidorum applicabilium dato plano deficientium cubo, maximum eſt illud, quod applicatur duabus tertijs partibus dati plani. E queſto è certiſſimo per eſſer da altri già dimoſtrato, e lo potrei dimoſtrare ancor io. Hor qui V. S. auuerta, che noi non habbiamo fatto altro, ſolo che fare, come l'eceſſo del piano A M, ſopra il quadrato C B; già che L C; e il ſuddetto eceſſo, e C B, e vguale al B M; ſi che C M, e quadrato, come dico il ſuddetto eceſſo al quadrato C D, coſi il C D, al C B. E nel ſegmento C B, pigliando qualunque punto E, eccitiamo la retta E F, ſi che ſia come l'eceſſo del piano A M, ſopra il quadrato E B, ad E, al quadrato E F, ad F B. In oltre come l'eceſſo del piano A M, ſopra il quadrato I B, al quadrato I H, coſi I H, ad I B, & in tal maniera operando con gl'altri punti della C B, ſia deſcritta la linea miſta B H F D, per i punti continuati abbiamo fatto quel, che biſognaua fare per trouar la radice della vguagliazione b pl. $a - a^3 = z$ ſol.

E per dimoſtrar ciò ſupponga V. S. che B G, perpendicolare all' A B, ſia lato di quel cubo, che è vguale à z. ſol. & in oltre ſupponga, che A M, ſia b pl. e condotta la linea G H, parallela all' A B; e dal punto H, caſchi la perpendicolare H I. Dico che I B, è il valore della radice è non deue I B, eſſer vguale al B M, ma ſi deue eſſer vguale al B M.

Già che ſi è fatto come l'eceſſo dell' A M, ſopra il quadrato I B, al quadrato I H, coſi I H, ad I B, ne ſegue, che quel ſolido, la cui baſe è il ſopradetto eceſſo del piano A M, ſopra il quadrato I B, è l'altezza I B, ſia vguale al cubo I H, cioè B G, cubo, ò pure z ſol. ma il ſolido, la cui baſe A M, e l'altezza I B, meno il cubo dell' I B è vguale al ſolido la cui baſe è l'eceſſo del piano A M, ſopra il quadrato I B, e l'altezza è l'iſteſſa I B, dunque il ſolido, la cui baſe A M, & l'altezza I B, meno il cubo dell' I B, ſarà vguale al cubo del B G, ò vero z ſol. V. S. dunque vede, che ſe A M, e b planum coefficiens ſublaterale, & il cubo del B G, ſit comparationis homogeneum, ò vero z. ſol. V. S. vede dico, che I B, e la radice, la quale non potrà mai eſſe vguale alla B M, alla quale deue eſſer vguale la C B, terza parte di tutta l' A B, per auere il maſſimo ſolido delli applicabili. Circa poi gl'eſſempij ch'ella me ne apporta per numeri &c. L'equiuoco ſtà che ella non fa il ſolido deficiente, ſi che il difetto ſia cubo, il che facendo tornerà come dico io, e per meglio laſciarmi intendere io diſſi che quando C B, non ſia vguale alla B M; cioè che B M, non ſia la terza parte dell A B, biſogna farla per potere applicare il maſſimo ſolido &c.

Supponghiamo A B, eſſer 48, e B M, eſſer 4; ſi che la terza parte dell' A B, cioè C B, ſarà 16, che è inugnale al 4. Perche dunque 4 in 16 fà 64, il cui lato è 8, la linea potente C M ſarà 8. ſi facci per tanto 8 lato da chiamarſi B M, hora per 8 ſi diuida A M, che è 192, tanto facendo B M 4 in A B 48, e ne verrà quoziente 24, per lato da chiamarſi A B. Hora il maſſimo ſolido da poterſi applicare al piano A M 192 deficiente con vn difetto, che ſia cubo; dico che ſarà quello, che è conſtituito ſopra 128, cioè L C, ſupponendo B M 8, & A B 24; ſi che A C ſia 16, il quale ſolido è 1024, e queſto ſarà il maſſimo ſolido da poterſi applicare al piano 192, che ſia deficiente &c. Il che potrò dimoſtrargielo Geometricamente, ogni volta che ella voglia. Di modo che ſe noi ſupponeſſimo A M, pur 192, & A B 32; ſi ehe B M, foſſe 6; il ſolido applicato al 192, ma deficiente con vn difetto cubo ſarebbe minore del 1024. Sottraggaſi 6 dal 32, reſterà 26, il quale ſi multiplichi per 6 fa 156, quale multiplicato per 6 fà 9656, ò vero ſi moltiplichi 192 per 6, e fà 1152, dal quale ſottrattone 216, cubo del 6 riman pure 936, il che è meno del 1024, perche V. S. dice. e ſoggiunſe per la commun altezza B M, &c. ma queſti ſolidi che ella fa, non ſono quelli, de quali noi parliamo, [cioè che ſiano deficienti con vn difetto,

che ſia

che ſia cubo; di modo che non fanno al propoſito.

V. S. ſoggiunge. Ciò poſto io dico che il ſolido L C, in C B, non è il maſſimo, &c. Confeſſo, ch'io non intendo queſto diſcorſo V. S. ne apporta l'eſempio de i numeri ſupponendo A B, eſſer 12, A C 8, C B 4, A I 10, I B 2, & L C 32; &c. dice poi, che il ſolido non fà il ſolido deficiente; Si che il difetto ſia cubo. Soggiũge appreſſo il ſolido L I, in I B, ſarà 80. Tutto bene, ma non ſono i ſolidi de quali noi parliamo deficienti con vn difetto cubo.

V. S. ſoggiunge dicendomi.

Paſſo ad vn altro punto V. S. dice che L B, ſia B pl. e che I B, e la radice A, che era ignota, e per conſeguenza B pl. in A -- a^3 ſia eguale al cubo I H, e ſia l'iſteſſo che L B, in I B -- I B, cubo. Hora facciamo i conti L B è 48, B I 2, B I, cubo 8; adunque L B, in I B -- I B cubo è 88; perche L B è 96, dal quale ſi leua 8 cubo di B I, il ſolido L I, in I B, eguale al cubo I H, dicemmo eſſer 80 ſolamente; adunque il cubo I H, che ſi figura z ſol. e minore che L B in I B -- I B cubo; e conſeguentemente minore di B pl. in A -- a^3.

V. S. mi ſcuſi, perche ſta ella ſempre ſu gl'eſempy, che non conducono al caſo noſtro. V. S. dice che L I in I B ſarà 80, perche ſuppone A I 10, & I B 2. Hora ſi deuon fare 80 L I in I B, che L I ſia 40; di modo che ſendo A I 10, e neceſſario, che A L, ſia 4, e coſi parimente B M, dourà eſſer 4, & eccoci fuor del caſo noſtro, cioè che il ſolido del quale V. S. parla non è applicato all'A B, ò pure ad vn piano eguale ad eſſo, ſi che ſia deficiente in modo, che il difetto ſia cubo, ma il difetto ſarebbe vn ſolido ſotto il piano I M, che è 8, ſendo I B 2 e B M 4, e l'altezza ſarebbe I B 2, che fan 16 multiplicato l'8 per 2 il qual 16, ſottratto dal 96, ſolido ſotto il piano L B, & l'altezza I B ne rimane 80, per il ſolido L I, in I B. Vegga dunque V. S. doue ſta l'equiuoco, hor facciamo i conti à mio modo. Mentre che L B, e 48, I B 2, & B M 4, deue farſi che B M, ſia pur 2; onde A B non ſarà più 12 ma 24, & il piano L B, ſarà pur 48, al quale applicato vn ſolido. che ſia deficiente di vn cubo, il cui lato ſia I B 2, trouerrà ella tal ſolido eſſer 88, perche ſendo L B 48, mentre A B è 24, B M è 2, l'altezza I B 2, multiplicata per L B piano 48, fà 96, dal quale ſottratto 8 cubo del I B reſta 88, per il ſolido L I in I B, che è molto minore del ſolido L C in C B, ch'era 128 &c. Queſto è quanto m'occorre, mentre per fine la riueriſco.

Piſa li 20. Aprile 1665.

Di V. S. Illuſtriſs.

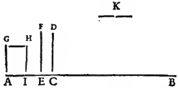
Obligatiſs. Seruitore
Carlo Renaldini.

Ad tertium genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

QVARTA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$ba^3 - a^4 = b^3 d.$$



DAta ſit coefficiens A B, & K, ſit recta cuius Quadrato-quadratum æquale ſit comparationis homogeneo. Secetur A B, in C, ita vt A C, ſit quarta pars totius A B. Deinde ex C, excitetur C D, itaut ſit quemadmodum A C, ad C D, ita cubus C D, ad cubum C B; Manifeſtum eſt autem maximum plano-planum quod applicatur datæ lineæ deficiens quadrato-quadrato eſſe id, quod applicatur quartæ parti datæ lineæ, & quadrato-quadratum, quod deficit occupare tres quartas partes datæ lineæ. Quare maximum plano-planum erit contentum ſub A C, & ſub cubo C B; Itemque conſtat plano-planum prædictum, æquale eſſe quadrato-quadrato ipſius C D. Sumantur deinceps alia puncta in A B, vt E, & ex E, excitetur E F, itaut quemadmodum A E, ad E F, ita cubus E F, ad cubum E B, atque adeò erectis perpendicularibus prædicta lege inuenctis ad rectam A B, per earum extremitates ducta

intelli-

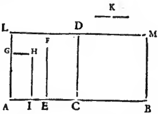
intelligatur linea. Mox verò ex A, excitetur AG, æqualis K, agatur autem GH, parallela ipſi AD, occurrens lineæ ADB, in H, ex H, verò cadat perpendicularis HI. Dico IB, eſſe propoſitæ æquationis radicem.

Ad tertium genus pertinentium Linearum MƚDICEARVM.

QVINTA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$b^2 a^2 - a^4 = b^3 d.$$



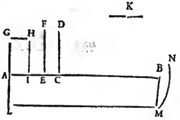
DAta ſit coefficiens magnitudo planum AM; at verò K, ſit recta cuius plano-planum æquale ſit comparationis homogeneo. Secetur AB, in C, vt AC, ſit dimidium ipſius AB; atque adeò tam AC, quam CB, contineat duas quartas partes ipſius AB. Eodem modo planum ipſum diuiſum erit. Vel igitur BM, æqualis eſt CB, vel inæqualis. Hoc autem caſu conſtituendum eſt planum æquale coefficienti plano, ea lege vt latus maius duplum ſit minoris vnde latus AB, duplum ſit lateris BM. Ex puncto autem C, excitetur CD, ea lege, vt ſit quemadmodum AC, quadratum ad CD, quadratum ita CD, quadratum ad CB, quadratum. Manifeſtum eſt autem Maximnm plano-planum omnium applicabilium dato plano deficientium quadrato-quadrato eſſe illud quod applicatur duabus partibus ex quatuor in quas diuiditur planum, hoc eſt dimidio ipſius plani. Et quadrato-quadratum, quod deficit occupare duas reliquas partes, ſeu reliquum dimidium; itemque conſtat plano-planum ſub CM, & LC, æquale eſſe plano-plano CD. Aſſumpto quocunque puncto E, & erecta perpendiculari EF, ea lege, vt ſit quemadmodum planũ LE, ad quad. EF, ita quad. EF, ad quadratum EB, & ſic deinceps aſſumptis alijs punctis in AB, & per extremitates erectarum intelligatur ducta linea, mox verò ad extremum A, excitata ſit perpendicularis AG, æqualis K, cuius quadrato-quadratum æquale eſt comparationis homogeneo. agatur GH, parallela ipſi AB, ex H, cadat HI, perpendicularis. Dico AI, eſſe propoſitæ æquationis radicem.

Ad tertium genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

SEXTA

Pro Effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit

$$b^3 a - a^4 = b^3 d.$$



Planum MN, idem eſt quod quadratum AC

DAta ſit coefficiens magnitudo ſolidũ ABMLN; at verò recta K, ſit cuius quadrato-quadratum æquale ſit comparationis homogeneo. Diuidatur AB, in C, vt AC, ſit quarta pars totius AB, & hunc in modum etiam ſolidum diuiſum erit; ex C, excitetur perpendicularis CD, ea lege, vt ſit quemadmodum AC, ad CD, ità cubus ex CD, ad ſolidum ſub CB, & MN. Manifeſtum eſt autem maximum plano-planum, quod applica-

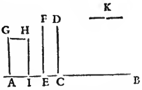
tur dato

tur dato ſolido deficiens quadrato-quadrato eſſe id, quod applicatur tribus ex quatuor partibus dati ſolidi, & quadrato-quadratum, quod deficit occupare reliquam quartam partem. Quare maximum plano-planum erit contentum ſub A C, & ſolido ſub C B, & M N. Itemque conſtat plano-planum ſub A C, & ſolido ſub C B, & M N, æquale eſſe plano-plano C D. Deinde aſſumpto quocunque alio puncto E, & ex E, excitetur E F, eadem lege, vt ſit quemadmodum A E, ad E F, ità cubus E F, ad ſolidum ſub E B, & M N, & ita deinceps procedatur aſſumptis alijs, alijſque punctis, & erectis perpendicularibus modo iam dicto, & per earum extremitates intelligatur ducta linea; ex A, excitetur perpendicularis A G, æqualis k, cuius plano-planum æquale eſt comparationis homogeneo ex G, agatur G H, parallela ipſi A B, & ex H, cadat perpendicularis H I. Dico A I, æquationis propoſitæ radicem eſſe.

Ad tertium genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

SEPTIMA

Pro effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit
$b a^4 - a^5 = b^3 d^2$.



DAta ſit coefficiens magnitudo recta A B, & K, ſit cuius plano-ſolidum, nempè quadrato-cubus æqualis ſit comparationis homogeneo. Diuidatur A B, in C, vt A C, ſit quinta pars totius A B, ex C, excitetur C D, ea lege, vt ſit quemadmodum A C, ad C D, ita quadrato-quadratum C D, ad quadrato-quadratum C B. Manifeſtum eſt maximum plano-ſolidum quod applicatur datæ lineæ deficiens quadrato-cubo eſſe, id quod applicatur quintæ parti datæ lineæ, & quadrato-cubum, qui deficit occupare reliquas quatuor ex quinque partibus datæ lineæ. Itemque conſtat plano-ſolidum ſub A C, altitudine & ſub quadrato-quadrato C B, æquale eſſe quadrato cubo ex C D. Aſſumatur aliquod aliud punctum E, & ex E, excitetur E F, ea lege vt ſit, quemadmodum A E, ad E F, ita quadrato-quadratum E F, ad quadrato-quadratum E B, & ſic deinceps procedatur aſſumptis alijs, alijſque punctis & erectis lineis perpendicularibus per quarum extremitates intelligatur ducta linea. Mox autem ex B, excitetur perpendicularis B G, æqualis K, cuius quadrato-cubus æqualis ſit comparationis homogeneo agaturque G H, parallela ipſi A B, ex H, cadat H I. Dico I B, eſſe æquationis propoſitæ radicem.

Eſt enim plano-ſolidum ſub A I, & ſub quadrato-quadrato I B, æquale quadrato-cubo ex I H, at verò prædictum plano-ſolidum æquale eſt plano-ſolido ſub A B, altitudine, & ſub quadrato-quadrato I B, minus quadrato-cubo ipſius I B. Quare plano-ſolidum ſub A B, & quadrato-quadrato I B, minus quadrato-cubo eiuſdem I B, æquale erit quadrato-cubo ipſius I H, ſeu B G, hoc eſt datæ rectæ K.

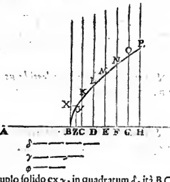
ALIVD

ALIVD QVODDAM GENVS MEDICEARVM LINEARVM Pro effectionibus Geometricis, cùm Æquatio fuerit multiplicis affectionis.

AD hoc Linearum genus pertinent Lineæ inſeruientes effectionibus Geometricis pro æquationibus, in quibus Poteſtas eſt multipliciter affecta, vt ſi fuerit

$$a^4 + 2ba^3 + b^2a^2 - d^2a^2 - 2d^2ga = d^2g^2 + d^3f$$

Si igitur fuerit æquatio huiuſmodi, ad quam Analyſis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio dictante Poriſmate comparetur. Reſoluta in analogiſmum, vt par eſt, fiet vt $a^3 + 2ba^2 + b^2a - d^2a - 2d^2g$, *ad* $dg^2 + d^2f$, *ità* d, *ad* a.



Expoſita ſit recta A B, quæ ſit coefficiens longitudo ſubcubica, eiuſque quadratum, minus quadrato δ, ſit coefficiens planum ſubquadraticũ, & aliæ etiam magnitudines γ, & φ expoſitæ ſint; deinde ipſa A B, protrahatur ad partes B, in infinitum, & in ipſa quidem protracta ſumantur qualeſcumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; mox verò fiat vt ſolidum ex δ, in quadratum γ vna cum ſolido ex eadem δ, in quadratum φ, ad cubum B C, vnà cum duplo ſolido ex quadrato B C, in A B, plus ſolido ex B C, in quadratum A B, minus ſolido ex B C, in quadratum δ, minus duplo ſolido ex γ, in quadratum δ, ità B C, ad C K, & eodem modo comparentur rectæ D L, E M, F N, G O, H P, &c. Iiſdem adhibitis magnitudinibus datis, vnà cum B C, B D, B E, B F, B G, B H, & ita deinceps. Per puncta verò B, K, L, M, N, O, P, &c. intelligatur ducta quædam linea, nam hæc ipſa erit, quæ ad effectionem prædictam cõducit; Cùm enim factũ ſit vt diximus erit etiam conuertendo vt cubus B C, vna cum duplo ſolido ex quadrato B C, in A B, plus &c. ad ſolidum ex δ in quadratum γ, plus ſolido ex eadem δ in quadratum φ, ita C K, ad B C. Huiuſmodi igitur indolis eſt linea tranſiens per puncta B, K, L, M, N, O, P, vt ſi ex quocumque puncto, exempli gratia Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, eadem ſit ratio iam dicta ſolidi ad ſolidum, quæ eſt Z Y, ad B Z; Quamobrem ſi coefficiens magnitudo ſubcubica fuerit A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B, ſecetur B X, æqualis rectæ, cuius quadratum ductum in γ^2 plus φ^2, faciat comparationis homogeneum; & ex puncto verò X, ducatur X Y, parallela ipſi A H, ex puncto autem Y, cadat perpendicularis Y Z, cubus B Z, vnà cum duplo ſolido ex quadrato B Z, in A B, plus &c. ad ſolidum ex δ in γ^2, vna cum ſolido ex δ in φ^2, ita Z Y, ad B Z, ac propterea conſurget æquatio, in qua B Z, quadrato-quadratum, plus duplo plano-plano ex cubo B Z, in A B, vna cum plano-plano ex B Z, quadrato in A B, quadratum, minus plano-plano ex B Z, quadrato in δ, quadratum, minus duplo plano-plano ex δ, quadrato in rectangulum ſub B Z, & γ, æquabitur plano-plano ex quadrato δ in γ, quadratum, vnà cum plano-plano ex δ, quadrato in φ quadratum. Innoteſcit igitur ignota quantitas, nempè B Z, vtpotè illa, cuius quadrato-quadratum vna cum duplo plano-plano &c. æquatur plano-plano ex δ quadrato in γ quadratum, plus plano-plano ex eadem δ quadrato in φ, quadratum. Propoſitæ igitur æquationis radix erit B Z, &c. Huiuſmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ deſcriptæ, in puncto Y.

Sic & aliæ plurimæ lineæ inueniri excogitarique poſſunt, quæ dificilimis Effectionibus inſeruient. Sed prædictarum Linearum naturam diligentiùs perſequi huius loci non eſt, alibi tamen de ipſis fortaſſis verba redibunt.

F DE

DEFINITIONES.

I.

Poſita *Quantitas*, *vt initio quoque definita fuit*, *eſt illa*, *quæ ad libitum ſumitur ad communem menſuram eiuſdem generis*, *& quæ ab vnitate denominatur*.

II.

Si fiat, *vt Poſita ad quadrati latus*, *ita hoc ad aliud*, *quæ prouenit longitudo*, Reſolutum Quadratum, *dicatur*.

III.

Si fiat, *vt Poſita ad latus rectanguli*, *ita latus alterum ad aliud*, *quæ prouenit longitudo*, Reſolutum Rectangulum *appelletur*.

IV.

Si fiat, *vt Poſita ad quadrati latus*, *ita quadratum reſolutum ad aliud*, *quæ prouenit longitudo* Reſolutus Cubus *nuncupetur*.

V.

Si fiat, *vt Poſita ad vnius rectanguli latus*, *ita reſolutum rectangulum ad aliud*, *quæ prouenit longitudo* Reſolutum Solidum, *vocetur*.

VI.

Si fiat, *vt Poſita ad quadratum reſolutum*, *ita hoc ad aliud*, *quæ prouenit longitudo* Quadrato-quadratum Reſolutum, *dicatur*.

VII.

Si fiat, *vt Poſita ad rectangulum reſolutum*, *ita hoc ad aliud*, *quæ prouenit longitudo* Plano-planum Reſolutum, *appelletur*.

VIII.

Reſolutio Planorum in longitudines, Prima Reſolutio, *dicitur*.

IX.

Solidorum autem, Secunda;

X.

Plano-planorum, Tertia; *& ſic deinceps*.

XI.

Longitudines, *in quas factæ ſunt commemoratæ reſolutiones*, Æquipollentes Magnitudines, *dicantur*.

XII.

Quæ inter Plana, *vel inter ſolida*, *vel inter Plano-plana &c. Fit comparatio* Originaria dicatur Ratio,

Quæ

XIII.

Quæ inter Plana, vel inter ſolida, vel inter Plano-plana &c. modo iam dicto reſoluta, fit comparatio, Æquipollens Ratio, *vocetur.*

XIV.

Cùm per Analyſeos veſtigia regredimur, ſolidis, ſi quæ in eâ extiterunt, ad ſyntheſin, non niſi reſolutis adſcitis, eſt Regreſsus per Æquipollentia.

XV.

Analogiſmus omnis, quo in reſoluendo vtimur, Analyticus, *dicatur.*

XVI.

In omni quidem Analytico Analogiſmo ad æqualitatem reuocato facto Paraboliſmo, cum opus fuerit, in explicanda æquatione quantitas, ad quam facta eſt omnium applicatio, non amplius adhibetur; hæc proindè, quæ alioquin Metiens dicebatur, quæque ad ſintheſin adſciſcitur, Reaſſumpta, *vocetur.*

XVII.

Tranſitus, quem facit Analyſta, a reſolutis Planis ad reſoluta ſolida, Plano-plana &c. longitudinibus conſtanter inhæreſcens, Tranſiſtentia, *nuncupetur.*

XVIII.

Cùm verò ex æqualitate longitudinum inquiritur in ijſdem longitudinibus æquipollens proportio ei, quæ initio inquirenda aſſumebatur, hæc Ratio ſymbolica, *vocetur, ſic de æqualitate &c.*

XIX.

Cum autem ex proportione longitudinum per Reaſſumptam, fit gradatio ad eam, de qua quæritur, proportio, huiuſmodi gradatio, Redintegratio, *nuncupetur. Sic de æqualitate.*

XX.

Et Proportio illa de qua quærebatur, quæque tandem adinuenta eſt, Redintegrata *appelletur.*

DE VNITATIS VSV IN GEOMETRIA

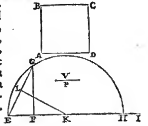
QVanti referat vnitatem in Geometriam inuexiſſe, facilè cuilibet erit depræhendere, ſi non nihil aduerterit difficultatem infinitorum propemodum in hac Arte Problematum, vnitatis vſu nullam reddi poſſe; Cùm enim quiſpiam inſtituta Analyſi, ſyntheſin aggreditur, ſi illa ad ſolida, vel plano-plana, &c. aſcenderit, haud exiguis difficultatibus laborabit, quod etiam ſuperiùs innuimus. Sibi tamen ſtratam reddi viam ad componendum per regreſſum Analyſeos conſpiciet, dum vnitatis beneficio, plana, ſolida, plano-plana, &c. in ſimplices longitudines tranſmutauerit; ſic enim ſibi licebit Analyſeos veſtigia repetere, ac propterea demonſtrationem contexere; adeò vt non minus ei, quidem futura ſit obuia Syntheſis, quàm Analyſis. Qua verò Arte hæc ſit inſtituenda Reſolutio, paucis explicabimus.

Vnitatis vſus in Geometria magnifaciendus.

Digitized by Google

PROPOSITIO I.

Quo pacto planum vnitatis præſidio in ſimplicem longitudinem transmutetur.

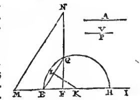


Propoſitum ſit rectangulum A B C D, nihil autem refert, quod oblatum rectangulum ſit quadratum, vel altera parte longius, tum quia ſolùm id diſcriminis eſt, quod in analogiſmo, cùm fuerit altera parte longius, non fit eiuſdem lateris repetitio; vnde ille contingit in quatuor terminis non ſic cùm fuerit quadratum; tunc enim in tribus terminis accidit analogiſmus, tùm quia rectangulum ad quadratum facilè reuocari poteſt facta igitur ſit hypotheſis de rectangulo A B C D; vnitas autem ſit V, recta quædam linea ad libitum, quæ Poſita dicitur. Fiat igitur vt V, ad A B, ita A D; (& ſi fuerit quadratum, ita eadem A B) ad aliam; hæc enim propoſito ſatisfaciet; nam in illam propoſitum rectangulum reſolutum dicetur, & quidem ſi rectangulum A B C D, fuerit quadratum, ea reſolutum quadratum appellabitur, quòd ſi fuerit altera parte longius, reſolutum rectangulum dicetur.

Sit autem quadratum, & diſponatur recta quædam E I, longitudinis quantum ſufficit ex qua abſcindatur E F; æqualis ipſi V; ex puncto verò F, excitetur perpendicularis FG, æqualis A B, lateri prædicti quadrati; ducatur E G, quæ bifariam ſecetur in L, ex L, ducatur recta faciens cum E G, rectos angulos, eaque neceſſariò occurret ipſi E I; ſitque L K, occurrens in K. Centro K, interuallo K E, deſcribatur ſemicirculus, qui neceſſariò tranſibit per G, ſecans E I, in H. Manifeſtum eſt F H, eſſe rectam quæſitam; hæc enim ducta in E F, ſeu V, faciet rectangulum æquale quadrato G F, atque adeò propoſito quadrato A B C D; cùmque E F, rationem habeat vnitatis, propterea F H, vt longitudo ſe habebit.

PROPOSITIO II.

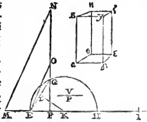
Solidum, vnitatis præſidio, in ſimplicem longitudinem tranſmutare.



In ſolidis verò ſic procedendum. Sit parallelepipedum (nihil autem refert, vtrum ſit cubus, an non) ſi enim cubus non fuerit, longior eſt operatio; præſtat ob id illud ad cubum reuocare. Eſto igitur cubus, cuius latus A; ſit autem vnitas V, quæ poſita dicitur, & fiat, vt hæc ad latus A, ità latus A, ad aliud, proinde diſponatur recta quædam E I, ex qua ſubtrahatur E F, æqualis poſitæ V; deinde ex F, erigatur perpendicularis F G, ipſi E I, æqualis tamen lateri dati cubi, nempe A; mox verò ducatur E G, quæ bifariam ſecetur in L, & ex L, agatur ipſi E G, perpendicularis L K, quæ ipſi E I, neceſſariò occurret, vt conſtat ex Elementis; occurrat autem in K; centro K, interuallo K E, deſcribatur ſemicirculus, qui neceſſariò tranſibit per G; & ſecet E I, in H. Deinde protrahatur F E, ad partes E in M, vt M F, ſit æqualis F H; ex M, agatur M N, parallela ipſi E G, occurrens F G, protractæ in N; erit F N, longitudo propoſito ſatiſfaciens. Quia ſemper tamen ferè contingit, vt in reſolutionibus ſolida ſint parallepipeda, vel ſola, vel cubis admixta; illa autem ad cubos reuocare non exigui laboris ſit, cùm inter duas rectas oporteat duas medias in continua ratione adinuenire; iuuat propterea ſtatim ipſa parallelep peda in longitudines reſoluere, vel quod idem eſt, præcauere, ne in illa incidatur; quoniam verò parallelepipedum poteſt in duplici eſſe diſcrimine, vel ita vt baſis ipſius quadratum ſit, vel ſit rectangulum, ſed non quadratum. Sit igitur parallelepipedum $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\epsilon\,\zeta\,\eta\,\theta$. cuius baſis $\alpha\,\theta\,\epsilon\,\delta$. ſi hæc fuerit rectangulum, ſed non quadratum, ad quadratum redigatur.

Exponatur

Exponatur igitur recta quædam E I, in qua ſecetur E F, æqualis V, poſitæ quantitati, quæ vnitas dicitur; ex F, erigatur perpendicularis F G, æqualis rectæ, quæ eſt latus baſeos ipſius parallelepipedi vt $\alpha\,\delta$; agatur E G, quæ ſecetur biſariam in L; & ex L, ad rectos angulos ducatur L K; mox verò centro K, interuallo K E, deſcribatur ſemicirculus, cuius peripheria ſecet E I, in H; mox verò fiat F O, æqualis altitudini ipſius parallelepipedi, vt $\alpha\,\beta$; deinde ducatur E O; Modo protrahatur H E, ad partes E, in M, ita vt M F, ſit æqualis F H, agatur autem M N parallela ipſi E O, donec occurrat F O, protractæ in N, erit F N, recta propoſito ſatisfaciens.

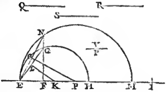


PROPOSITIO III.

Plano-planum in ſimplicem longitudinem tranſmutare.

In plano-planis ita procedendum; & primo quidem plano-planum, de quo loquimur ſit quadrato-quadratum, vt $s^s s^s$. Fiat igitur vt poſita ad s, ita s, ad r, & vt poſita ad r, ita r, ad q.

Diſponatur itaque quædam recta E I, ex qua auferatur E F, æqualis poſitæ V; deinde ex puncto F, excitetur perpendicularis F G, æqualis S; mox verò ducatur E G, eaq; biſſecetur in L; ex L, ei fiat perpendicularis L K, quæ neceſſariò occurret ipſi E I: occurrat autem in K; & centro K, interuallo k E, deſcribatur ſemicirculus, qui neceſſariò per G, tranſibit; hic verò ſecet rectam E I, in H; mox protrahatur F G, ad partes G, & fiat F N, æqualis F H; ducatur E N, quæ biſſecetur in O: ex O, eidem E N, conſtituatur perpendicularis O P; centro autem P, interuallo P E, deſcribatur ſemicirculus, qui neceſſariò tranſibit per N, & ſecet E I, in M, erit F M, recta propoſito ſatisfaciens.



Quia tamen in reſolutionibus ſemper ferè contingit, vt plano-plana ſint, vel ſola, vel quadrato-quadratis admixta; propterea iuuabit ſtatim ipſa plano-plana in longitudines reſoluere, vel quod idem eſt præcauere, nè in illa incidatur.

Aut igitur plano-planum ſit ex ductu duorum quadratorum æqualium, atque tunc eſt quadrato-quadratum, de quo hactenus diſſeruimus; vel ſit ex ductu duorum quadratorum inæqualium, vel duorum rectangulorum, ſiue æqualium, ſiue inæqualium, vel rectanguli, & quadrati.

Si conſtat duobus quadratis inæqualibus vt $b^s c^s$, & inſtituenda ſit reſolutio, fiat vt vnitas, ſiue poſita ad b, ita b, ad aliam d, deinde vt vnitas ad c, ita c, ad aliam f; mox vt vnitas ad d, ita f, ad g; atque hunc in modum longitudo g, propoſito ſatisfacit; eſt enim illa, in quam plano-planum prædictum intelligitur reſolutum.

Si verò conſtet duobus rectangulis, ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus ſuo modo procedendum.

Et ex hactenus dictis liquidò conſtat quid agendum in Plano-ſolidis, Solido-ſolidis, &c.

Quæ hactenus tradita ſunt exemplis illuſtrantur.

PROBLEMA.

Datum ſit latus 12. diuidendum in duas partes, vt rectangulum ſub partibus, æquale ſit dato plano.

Datum ſit latus 12. diuidendum in duas partes, vt factum ſub ipſis æquale ſit 32.

Pars vna eſto 1 R, alia erit 12 — 1 R productum ſub his eſt 12 R — 1 Q, & hoc æquale eſſe

eſſe debet 32. Dimidium longitudinis coefficientis ſublateralis, ſeu numeri radicum eſt 6. cuius quadratum eſt 36; a quo ſi auferatur 32, remanebit 4; cuius latus quadratum eſt 2; quo dempto ex 6, dimidio iam dicto, fit reſiduum 4: pro parte minori, vnde maior non latebit, ſubtracta ſcilicet, minori ex toto latere diuidendo 12. Hinc.

PORISMA.

Sume dimidium numeri radicum, & ab eius quadrato aufer comparationis homogeneum; ſiue numerum abſolutum, reſidui latus quadratum ſubtrahe ex dimidio iam dicto; quod remanet erit pars minor.

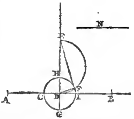
Speciebus autem ſic.

Reſolutio ſpecioſa. Latus diuidendum eſto b, homogeneum comparationis ſit z planum, Pars vna eſto a; alia erit b -- a; productum ex his eſt b a -- a^2 quod æquabitur z plano. Dimidium coefficientis longitudinis ſublateralis eſt $\frac{1}{2}$ b; huius quadratum eſt $\frac{1}{4}$ b^2 à quo ſi auferatur z planum; fiet reſiduum $\frac{1}{4}$ b^2 -- z plano, cuius latus quadratum eſt ℞ ($\frac{1}{4}$ b^2 -- z plano) à quo ſi auferatur $\frac{1}{2}$ b; fiet reſiduum ℞ ($\frac{1}{4}$ b^2 -- z pl.) -- $\frac{1}{2}$ b. pro parte minori. Maior autem non latebit. Hinc.

PORISMA.

Sumatur dimidium coefficientis longitudinis ſublateralis, & ab eius quadrato auferatur homogeneum comparationis, reſidui autem latus quadratum auferatur ex prædicto dimidio, quod enim ſupereſt erit pars minor quæſita.

Data ſit recta A B, diuidenda in duas partes, ita vt rectangulum ſub ipſis, æquale ſit quadrato N.



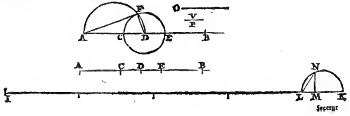
Diuidatur A B, bifariam in D, & ex D, excitetur perpendicularis D E, æqualis ipſi A D; at verò ſuper D E, deſcribatur ſemicirculus E F D, in quo aptetur E F æqualis N; ducaturque D F; centro autem D, interuallo D F, deſcribatur circulus ſecans A B in C, & I.

Dico eſſe A C, partem minorem; itaut rectangulum A C B, æquale ſit quadrato ex N. Protrahatur E D, vſque ad peripheriam in G.

Quoniam igitur D E, eſt æqualis A D. & G D, æqualis D I; erit A I, æqualis G E; & quia D H, eſt æqualis C D; æqualibus exiſtentibus D E, A D; proinde reſiduum H E, æquabitur reſiduo A C; ergo rectangulum G E H; æquabitur rectangulo I A C; ſed rectangulum G E H; æquale eſt quadrato E F; ergo rectangulum I A C; æquabitur quadrato E F; ſed rectangulum I A C; eſt æquale rectangulo A C B; cum eadem ſit A C, in vtraque & A I, ſit æqualis C B; eſt enim A D, æqualis D B; atque C D, æqualis D I, propterea A I, erit æqualis C B; ergo rectangulum A C B; æquale erit quadrato E F, ſed E F, facta eſt æqualis N; ergo rectangulum A C B, æquale erit quadrato N. Quod erat faciendum.

Data ſit recta A B, ita diuidenda, vt rectangulum ſub partibus æquale ſit dato plano, nempe quadrato ex O.

Ad vſum Vnitatis vti poſſemus ſuperiori effectione, ac demoſtratione Geometrica, lubet tamen idem aliter abſoluere.

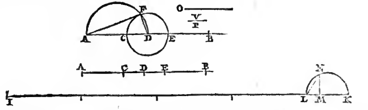


Digitized by Google

Secetur A B, biſariam in D, & ſuper alterutrum dimidium puta A D deſcribatur ſemicirculus A F D, in quo aptetur recta A F, æqualis datæ rectæ O; mox autem agatur F D, & centro D, ad interuallum D F, deſcribatur circulus C F E. Dico alterutrum punctorum C, E, puta C, ſatisfacere, ita vt rectangulum A C B, æquale ſit quadrato datæ rectæ O.

Quoniam enim A D, æqualis eſt D B, ex conſtructione; & C D, æqualis eſt D E, erit A C, æqualis E B, addita communi C E, fiet A E, æqualis C B, quare rectangulum ſub A C, & C B, æquabitur rectangulo ſub A C, & A E, ſed rectangulum ſub A C, & A E, æquale eſt quadrato ipſius A F, ergo rectangulum ſub A C, & C B, æquabitur quadrato eiuſdem A F; ſed quadratum rectæ A F, æquale eſt quadrato ipſius O; cum A F, facta ſit æqualis ipſi O; propterea rectangulum ſub A C, & C B, æquabitur quadrato datæ rectæ O.

Adſcita autem vnitate in Geometria procedendum eſt hunc in modum. Sumatur recta quædam V, quæ poſita dicetur, vnitatis munere fungens, in ordine autem ad hanc omnia tractentur conceptis magnitudinibus, ſeu quantitatibus cuiuslibet generis per modum longitudinum. Fiat igitur vt V, ad A D, ita A D, ad aliam quæ ſit I K; Manifeſtum eſt rectangulum ſub V, & I K, æquale eſſe quadrato ipſius A D. Deinde fiat vt V, ad O, ita O, ad aliam quæ ſit I L; Manifeſtum eſt etiam rectangulum ſub V, & I L, æquale eſſe quadrato ipſius O; ac proinde æquale eſſe quadrato rectæ A F Secetur L M, æqualis V. Quoniam verò duo ſunt rectangula, quorum vnum ſub I K, & L M, aliud verò ſub I L, & eadem L M, continetur ob communem autem eorum altitudinem L M, ſi minus de maiori ſubtrahatur, quod remanet erit rectangulum ſub L K, & L M; ſuper L K, deſcribatur ſemicirculus LNK, & ex puncto M, excitetur perpendicularis M N, agaturque LN; hæc vtique poterit rectangulum K L M, reſiduum iam dictum; vt itaque rectangulum ſub I K, & L M, æquale eſt quadrato A D, & rectangulum ſub I L, & L M, æquale eſt quadrato rectæ O, ſeu A F, ita rectangulum K L M, ſeu quadratum L N, nempe exceſſus, quo rectangulum ſub I K, & L M. ſuperat rectangulum ſub I L, & L M, æquabitur quadrato D F, quo quadratum A D, ſuperat quadratum A F. Si igitur fiat C D, æqualis D F, circulo deſcripto C F E, erit C D, æqualis L N.



Intelligatur A B, biſariam diuiſa in D, & facta ſit C D, ipſi quidem L N, æqualis. Quoniam igitur rectangulum ſub I K, & L M, æquale eſt quadrato A D, vt vidimus ergo rectangulum ſub I K, & L M, minus rectangulo K L M, æquabitur quadrato A D, minus rectangulo K L M, ſed rectangulum K L M, æquale eſt quadrato L N, ergo rectangulum ſub I k, & L M, minus quadrato L N, æquabitur quadrato A D, minus quadrato L N, ſed quadratum C D, eſt æquale quadrato L N, ſiquidem fecimus C D, æqualem L N, ergo rectangulum ſub I K, & L M, minus quadrato L N, æquabitur quadrato A D, minus quadrato C D; ſed rectangulum ſub I K, & L M, minus quadrato L N; (hoc enim quadratum idem eſt quod rectangulum k L M), æquale eſt rectangulo ſub I L, & L M, quadratum verò ex A D, minus quadrato C D, idem eſt quod rectangulum C A E, cum C E, ſit in D, biſariam diuiſa, & ei addita ſit A C, ergo rectangulum ſub I L, & L M, æquabitur rectangulo CA E, ſed rectangulum CA E, eſt æquale rectangulo A C B, ergo rectangulum ſub I L, & L M, æquabitur rectangulo A C B; ſed rectangulum ſub I L, & L M, æquale eſt quadrato ex O, quandoquidem ſecimus, vt V, ad O, ita O, ad aliam puta I L, atque L M, fecimus æquale ipſi V, ergo rectangulum A C B, æquabitur quadrato ex O. Quod faciendum erat.

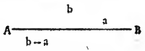
Vnitatis

Vnitatis vſum hucuſque explicuimus, nunc tamen non eſt opus huiuſmodi induſtria, ſiquidem in ſuperiori Problematis analyſi nullus eſt factus aſcenſus ad ſolida, modo reſolutionem aſſeremus Problematis, in quo huiuſmodi aſcenſus contingit; Propoſitum itaque ſit,

PROBLEMA,

Datum latus ita diuidere, vt Quadratum vnius partis ad rectangulum ſub toto, & altera parte datam habeat rationem.

Datum ſit latus A B, ſic in duas partes diuidendum, vt quadratum vnius partis ad rectangulum ſub toto, & altera parte rationem habeat, vt R ad S.



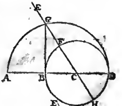
Numeris hunc in modum Propoſitum ſit latus diuidendum 12, ità vt quadratum vnius partis, ad rectangulum ſub tota altera parte rationem habeat, vt 4 ad 3, pars vna eſto 1 R, alia erit 12 -- 1 R, quadratum ipſius 1 R eſt 1 Q, rectangulum ſub toto, & altera parte eſt 144 R -- 12 R, eſt vt 4 ad 3, ita 1 Q, ad 144 -- 12 R, ergo fiet æquatio 3 Q = 576 -- 48 R, & per antitheſin 3 Q + 48 R = 576 fiet facto paraboliſmo 1 Q + 16 R = 192, cuius æquationis radix eſt 8 hinc Canon &c. *(Reſolutio numeroſa.)*

Latus ipſum eſto b, & pars vna ſit a, altera igitur erit b -- a, quadratum partis, quæ ponitur a eſt a^2, rectangulum autem ſub toto, & altera parte, quæ erat b -- a, eſt $b^2 - ba$, vt autem eſt r ad s, ità debet eſſe a^2 ad $b^2 - ba$, facilioris verò reſolutionis gratia fiat vt s ad r, ità b ad aliam putà d, propterea erit analogiſmus, vt d ad b, ità a^2 ad $b^2 - ba$, vndè fiet æquatio multiplicatis extremis, & medijs, eaque erit $db^2 - dba = ba^2$, & per antitheſin fiet $ba^2 + dba = db^2$, omnibus autē applicatis ad b & $a^2 + da = db$. Dimidium coefficientis ſublateralis d, eſt $\frac{1}{2}d$ cuius quadratum eſt $\frac{1}{4}d^2$, cui addito d b fit $\frac{1}{4}d^2 + db$, cuius latus quadratum eſt $\sqrt{\frac{1}{4}d^2 + db} - \frac{1}{2}d$; Hinc. *(Reſolutio ſpecioſa.)*

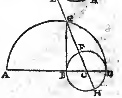
PORISMA.

Quadrato dimidiæ coefficientis ſublateralis addatur rectangulum factum à latere diuidendo in illud, ad quod latus diuidendum in eadem eſt ratione, in qua eſt terminus conſequens rationis datæ ad terminum antecedentem, aggregati verò ſumatur latus, & ei ſubducatur coefficientis dimidium, reſiduum enim erit radicis pretium, & partem vnam quæſitam diuidenæ lateris exhibebit, reliqua verò non latebit.

Duobus modis poteſt contingere reſolutio, vel ità vt latus diuidendum ſit minus eo, ad quod eſt, vt terminus conſequens rationis datæ ad antecedentem, idque euenit, quando ratio data eſt maioris ad minus, vel contra, ideò etiam duobus modis continget effectio, eadem tamen omninò contingit demonſtratio.



Datum ſit latus A B, diuidendum ea lege, vt quadratum vnius partis ad rectangulum ſub toto, & altera parte rationem habeat vt R, ad S. Fiat vt S ad R, ità A B, ad B D, deinde ſuper A D, deſcribatur ſemicirculus A G D, diuiſa autem B D, biſariam in C, centro C, interuallo alterutro C B, C D, deſcribatur circulus, mox verò ex B, excitetur perpendicularis B G, & per G, & C, ducatur G C H, quæ protrahatur ad partes G, ita vt F E, ſit æqualis A B. Dico F E, ſic eſſe diuiſam in G, vt quadratum G F, ad rectangulum F E G, rationem habeat, vt B D, ad A B; ſeu vt R ad S.



Quoniam enim A B, B G, B D, ſunt continuè proportionales, erit vt A B, ad B D, ità quadratum A B, ad quadratum B G; ſed quadrato B G, eſt æquale rectangulum H G F; ergo quadratum A B, ad rectangulum H G F erit, vt A B, ad B D; & conuertendo vt B D, ad A B, ità rectangulum H G F, ad quadratum A B, hoc

eſt ad quadratum F E; quare vt H F, ad F E; (ita enim eſt B D, ad A B,) ità erit rectangulum H G F, ad quadratum E F; ſed vt H F, ad F E, ità rectangulum H F G, ad rectangulum E F G, ob communem altitudinem F G; quare vt rectangulum H F G, ad rectangulum E F G, ità rectangulum H G F, ad quadratum E F; quoniam autem eſt, vt totum rectangulum H G F, ad totum quadratum E F; ità ablatum rectangulum H F G, ad ablatum rectangulum E F G, erit reliquum, putà quadratum F G (hoc enim remanet, ſi ex rectangulo H G F, auferatur rectangulum H F G) ad reliquum rectangulum F E G (hoc enim remanet, ſi ex quadrato E F, auferatur rectangulum E F G,) vt totum rectangulum H G F, ad totum quadratum E F; hoc eſt vt rectangulum H F G, ad rectangulum EFG; ſeu vt H F, ad F E; hoc eſt vt B D, ad A B, ſeu vt R, ad S, &c.

Quoniam ſuperior reſolutio, etſi procedens ad ſolida aſcendendo, Effectionem Geometricam dictauit, cuius demonſtratio ſatis eſt obuia ſolidis neglectis, per quæ factus erat inceſſus in reſoluendo; at verò ſyntheſis, analyſeos veſtigijs repetitis, vtpotè per ſolida procedens, parùm videtur ijs arridere, quibus candor Geometricus eſt in delitijs, quamuis habeat cum veritate commercium. Ea verò ſic ſe habet, eadem Effectione ſuppoſita.

Compoſitio per ſolida procedens.

Quoniam B G, tangit circulum B F D, erit rectangulum H G F, æquale quadrato BG, hoc eſt rectangulo A B D, hoc eſt rectangulo E F H; ſed rectangulum H G F, æquale eſt quadrato GF, plus rectangulo GFH; ergo quadratum G F, plus rectangulo G F H, æquabitur rectangulo EFH; omnibus ductis in AB, ſeu EF; ergo ſolidum ex AB, ſeu EF, in quad. GF, plus facto abs G F, in rectangulum E F H, æquabitur facto ab E F, in rectangulum E F H; hoc eſt abs F H, in quadratum E F; & per antitheſin, quod fit ex FH, in quadratum E F, minus facto ab F H, in rectangulum E F G, æquabitur facto ex E F, in quadratum G F; reuocata æqualitate ad proportionem, fiet analogiſmus vt F H, ad E F, hoc eſt vt B D, ad A B, hoc eſt vt R ad S, ità quadratum G F, ad quadratum E F, minus rectangulo E F G, hoc eſt ad rectangulum F E G.

Eò igitur omnis induſtria debet Artificis tendere, vt non caſu comparanda ſit demonſtratio Geometricæ Effectionis habitæ, analyſeos præſidio, & non contexatur per ſolidorum comparationem, propter eam, quam diximus, obſcuritatem: In cuius gratiam multa noſtris lucubrationibus adinuenimus, quibus opitulantibus aſſequi licebit intentum; vndè repetendo analyſeos veſtigia, quamuis in ea factus ſit aſſenſus ad ſolida, licebit veluti deducto filo, incedere, ſolidis ipſis neglectis, atque propoſitum demonſtrare.

Præcauendum eſt igitur, nè habita radicis æſtimatione, atque indè comperta æqualitate inter plana, nè deindè incidatur in ſolida ad concludendum propoſitum. Id verò fit beneficio poſitæ quantitatis ad eum, qui ſequitur modum. Cum igitur adinuentum fuerit quadratum ex G F, vnà cum rectangulo G F H, æquale eſſe rectangulo E F H, operæ pretium eſt, quantitatem aliquam ad libitum ponere, quæ vnitatis munere fungatur, quæ dicatur V, penes quam plana tractanda ſunt per analogiſmos, vt in longitudines reſoluantur, mox verò eâdem poſitâ quantitate adhibitâ, inuehenda eſt in medium quantitas E F, veluti ſecundus terminus analogiæ; hoc enim pacto inter longitudines æqualitas retinebitur, quæ per antitheſin non euaneſcet, atque tandem hac traſmutata in analogiſmum, comperiemus eſſe, vt F H, ad E F, ijs adhibitis, quæ præmiſimus, Lemmatibus, ità quadratum G F, ad quadratum E F, minus rectangulo E F G, hoc eſt ad rectangulum F E G.

Fiat igitur ſecundùm poſitam quantitatem V, reſolutio quadrati G F, in longitudinem K, & rectanguli G F H, in longitudinem L, demum rectanguli E F H, in longitudinem M, & erit quidem K, vnà cum L, æqualis M. Mox fiat vt eadem poſita ad E F, ità K, ad N, & vt eadem poſita ad E F, ità L, ad O, denique vt eadem poſita ad E F, ità M, ad P, & erit quidem N, vnà cum O, æqualis P, ergo P, minus O, æquabitur N.

Reſoluatur quadratum E F, in longitudinem Q, & rectangulum E F G, in longitudinem R, vtrumque ſecundùm eandem poſitam; ergo rectangulum F E G, erit Q, minus R; reſolutum autem erat quadratum G F, in longitudinem K; ex ijs igitur, quæ in ſuprà poſitis Lemmatibus oſtenſa ſunt, erit vt H F, ad F E, ità K, ad Q, minus R; hoc eſt ità quadratum G F, ad rectangulum F E G; Quod erat intentum.

Generalis ratio reſoluendi, quam Auctor adinuenit

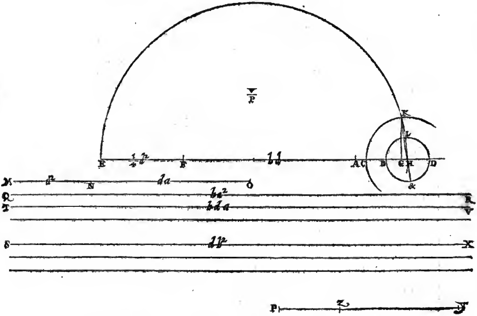
Sed vt hoc idem Problema iuxta generalem noſtram componendi formam tractemus, repetitis omninò Reſolutionis veſtigijs, ſiſtendo intra planorum comparationem, quamuis hæc per ſolida proceſſerit, ita ratiocinandum. Et primo Effectio, quam Poriſma dictat,

G ad eum,

ad eum, qui ſequitur modum perficienda.

Recta A B, ſit quæ detur diuidenda in puncto C; vt quadratum C B; ad rectangulum B A C, datam habeat rationem, quæ B D, ad B A.

Diuidatur B D, biſariam in H, ſitque G H, quantitas poſita; deinde fiat vt G H, ad A B, ita B D, ad F H; mox, vt G H, ad B H, ita B H, ad E F; ſuper E H, deſcripto ſemicirculo, ex puncto G, erigatur perpendicularis G K, agaturque H K, & centro H, interuallo æquali ipſi B H, deſcribatur arcus ſecans H K, in L; deinde fiat C B, æqualis K L. Dico A B, ſic eſſe diuiſam in C, vt quadratum C B, ad rectangulum B A C, ſit in ratione B D, ad A B. Id porrò, vnitatis, ſiue poſitæ quantitatis beneficio, demoſtrabimus analyſeos repetitis veſtigijs, etſi analyſis ad ſolida aſcenderit; ſi tamen hæc præmittantur,



A B = b = 6
B D = d = 8
C B = a = 4
A C = b − a = 2
E F = $\frac{1}{4}d^2$ = 16
F H = b d = 48
G H = o = 1
H L = $\frac{1}{2}$d = 4
L K = 2

M N = a^2 = 16
N O = d a = 32
Q R = b a^2 = 96
T V = b d a = 192
S X = d b^2 = 288
P Y = b^2 = 36
Z Y = b a = 24
P Z = b^2 − b a = 12

Hoc eſt quadratum C B, ad rectangulum B A C, erit vt B D, ad A B. Quod oportebat efficere &c.

Quoniam rectangulum E H G, æquale eſt quadrato H K; ſed H K eſt æqualis C H; ergo rectangulum E H G, æquabitur quadrato C H; ſed quadrato C H, eſt æquale rectangulum D C B, plus quadrato B H; ergo rectangulum E H G, æquabitur rectangulo D C B, plus quadrato B H; ſed rectangulum E H G, eſt æquale rectangulo E F in G H, plus

rectan-

rectangulo F H, in G H; ergo rectangulum E F, in G H, plus rectangulo F H G, æquabitur rectangulo D C B, plus quadrato B H; ſed rectangulum E F, in G H, æquale eſt quadrato B H (factum eſt enim vt G H, ad B H, ità B H, ad E F;) æqualibus propterea hinc inde ſublatis, rectangulum F H G, æquabitur rectangulo D C B; ſed rectangulo D C B, eſt æquale quadratum C B, plus rectangulo C B D; ergo quadratum C B, plus rectangulo C B D, æquabitur rectangulo F H G.

Fiat vt G H, ad C B, ità C B, ad M N, & ità B D, ad N O; nam rectangulum M N, in G H, plus rectangulo N O, in G H, æquabitur rectangulo F H G; atque adeò M N, plus N O, æquabitur F H.

Fiat rurſus vt G H, ad A B, ità M N, ad Q R; ità N O, ad T V, & ità F H, ad S X. Vel, cùm fuerit factum, vt G H, ad A B, ità A B, ad P Y, fiat vt G H, ad B D, ita P Y, ad aliam, quæ erit eadem S X. Cùm enim M N, plus N O, æquaretur F H, etiam Q R, plus T V, æquabitur S X; & per antitheſin S X, minus T V, æquabitur Q R.

Fiat vt G H, ad A B, ità C B, ad Z Y; vt permutando ſit G H, ad C B, quemadmodum A B, ad Z Y. Supereſt oſtendendum æqualitatem hanc ad proportionem redigi, in qua vt B D, ad A B, ita ſit N O, ad Z Y.

Quoniam igitur factum eſt vt G H, ad A B, ita F H, ad S X; & conuertendo vt A B, ad G H, ità S X, ad F H; factum autem erat vt G H, ad B D, ità P Y, ad S X; ergo ex æquali ſecundum rationem perturbatam erit vt A B, ad B D, ità P Y, ad F H; ergo conuertendo vt B D, ad A B, ità F H, ad P Y, ſed F H, æquatur M N, plus N O; ergo vt B D, ad A B, ita M N, plus N O, ad P Y; ſed fecimus vt G H, ad C B, ita B D, ad N O, & vt G H, ad C B, ita A B, ad Z Y; ergo vt B D, ad N O, ità A B, ad Z Y; ergo vt B D, ad A B, ita N O, ad Z Y; ſed erat vt tota B D, ad totam A B, ità tota M N, plus N O, ad totam P Y; nunc verò eſt vt tota B D, ad totam A B, ſic ablata N O, ad ablatam Z Y, ergo reliqua M N, ad reliquam P Z, erit vt tota B D, ad totam A B; hoc eſt quadratum C B, ad rectangulum B A C, erit vt B D, ad A B.

SCHOLION.

Ex ſuprapoſito Exemplo definitiones iam ſuprà allatas facillimum erit explicare. Cùm ſupra diceremus; fiat vt G H, ad B H, ita B H, ad E F, ipſa E F, dicitur quadratum reſolutum. Deinde cùm diceremus fieri vt G H, ad C B, ita C B, ad M N, ipſa M N, erit pariter quadratum reſolutum. Cùm diceremus fieri vt G H, ad C B, ita B D, ad N O, erit ipſa N O, rectangulum reſolutum. Cùm diceremus fieri vt G H, ad A B, ita M N, ad Q R, erit ipſa Q R, ſolidum reſolutum, ita etiam T V, quemadmodum S X, erunt ſolida reſoluta.

Definitiones explicantur. Quadratum reſolutum. Rectangulum reſolutum, &c.

Quando autem ſuperiùs reſoluimus quadratum B H, in E F longitudinem, vt quadratum C B, in longitudinem M N, & rectangulum C B D, in longitudinem N O, dicitur prior reſolutio; ſic quando ſolidum reſoluimus in longitudines Q R, T V, S X, ſecunda dicitur reſolutio.

Reſolutio prior. Reſolutio poſterior.

Reſolutum eſt enim ſolidum ſub altitudine A B, & quadrato C B, in longitudinem Q R, & ſolidum ſub altitudine A B, & rectangulo C B D, in longitudinem T V, & ſolidum ſub altitudine B D, & quadrato A B, vel ſub altitudine A B, & rectangulo A B D, reſolutum eſt in longitudinem S X.

Magnitudines æquipollentes. Ratio originaria. Ratio æquipollens.

Supradicta autem longitudines, in quas facta ſunt commemorata reſolutiones, magnitudines æquipollentes dicuntur. Æqualitas autem, quæ eſt inter rectangulum E H G, & quadratum H K, & inter rectangulum F H G, & rectangulum D C B, originaria dicitur ratio, eſtque ratio æqualitatis; at verò æqualitas inter longitudines M O, & F H, & inter Q R, plus T V, & S X, æquipollens ratio nuncupatur. Ille autem regreſſus, quem facimus ab æqualitate inter rectangulum F H G, & rectangulum D C B, ad æqualitatem inter M O, & F H, & inter Q R, plus T V, &c. dicitur regreſſus per æquipollentia. Quando autem fecimus vt G H, ad B H, ita B H, ad E F; & vt G H, ad A B, ita B D, ad F H; & vt G H, ad C B, ita C B, ad M N, &c. Hi ſunt analogiſmi, quos Analyticos appello. Quando verò fecimus vt G H, ad A B, ita M N, ad Q R, &c. quantitas A B, eſt, quæ à nobis reaſſumpta dicitur; hæc enim eſt, ad quam omnium facta eſt applicatio in reſolutione, in qua deinceps negligitur. Quando autem gradum fecimus à comparatione inter M O, & F H, ad comparationem inter Q R, plus T V, & S X, dicimur tranſiſtentiam feciſſe. Cùm autem inferimus ex ratione, quam habet M N

Regreſſus per æquipollentia. Analogiſmi Analytici. Quantitas reaſſumpta. Tranſiſtentia.

ad P Z, quæ eſt B D, ad A B, inferimus inquam, rationem quadrati A C, ad rectangulum B A C, eſſe vt B D, ad A B, hac ratio ſymbolica vocatur; & tunc dicimur Redintegrationem feciſſe, & ratio illa, nimirùm quadrati C B, ad rectangulum B A C, vt B D, ad A B, ea eſt ratio, quam Redintegratam appello,

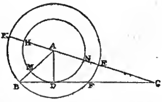
PROBLEMA,

Datis baſe, & perpendiculo, dataque ratione aggregati ex vno latere, & perpendiculo, ad aggregatum ex altero latere, & perpendiculo, reperire triangulum.

In triangulo A B C, data ſit baſis B C, 63. itidem data ſit perpendicularis A D, 20. atque demum data ſit ratio, quam habet aggregatum ex latere A B, & perpendiculari AD; ad aggregatum ex alio latere A C; & ex eadem perpendiculari A D, vt 5, ad 8, quæruntur latera,

Centro A, interuallo A D, deſcribatur circulus; deinde eodem centro A, interuallo autem A B, alter circulus deſcribatur, & quærantur latera A B, A C. Protrahatur C A, vſque ad K. Latus A B, eſto 1 R; K N, erit 1 R + 20 vt igitur 5 ad 8, ita debet eſſe 1 R + 20, nempè K N, ad aggregatum ex A D, A C, puta H C; vt igitur 5, ad 8, ita 1 R + 20, ad $\frac{8R+160}{5}$; ſingula autem aſſequemur; propterea quod, cùm (vt iam ſupra dictum fuit),

Datum ſit triangulum A B C, cuius baſis B C 63, ſit data; ſit itidem data perpendicularis A D 20; ſit demum data proportio &c, Suppoſuimus autem A B, eſſe 1 R; fecimus verò vt 5 ad 8, ſecundum datam rationem ita K N 1 R + 20, ad $\frac{8R+160}{5}$ pro H C; proinde ſi ex H C, puta $\frac{8R+160}{5}$ auferamus H E, nimirum 1 R + 20, remanebit $\frac{8R+160}{5}$ - 1 R - 20, pro E C; Si vero ab A E, puta 1 R, auſeramus A N, nempe 20, remanebit 1 R - 20, pro N E, atque adeo H K, erit 1 R - 20; quamobrem ſi ipſi H C, nempè $\frac{8R+160}{5}$ addamus 1 R - 20, fiet ſumma $\frac{13R+60}{5}$, pro KC, Vt igitur 63, ad $\frac{13R+60}{5}$ ità $\frac{8R+160}{5}$ - 1 R - 20, ſeu $\frac{3R+60}{5}$, ad $\frac{39Q+960R+3600}{1575}$.



Si igitur F C $\frac{39Q+960R+3600}{1575}$ ſubtrahatur ex 63, & remanebit pro B F $\frac{99225-39Q-960R}{1575}$, huius dimidium eſt $\frac{99225-39Q-960R}{3150}$, pro B D; huius autem quadratum eſt,

$\frac{1521QQ+74880C-6537150Q-183600000R+9144140625}{9922500}$, Huic addatur 400, quadratum ſcilicet perpendicularis A D, multiplicetur itaque 400, per 9922500, fiet productum 3969000000, addendum numero 9144140625, fiet igitur numerator fractionis

1521 QQ + 74880 C - 6537150 Q - 183600000 R + 13113140625; ac proinde erit fractio

$\frac{1521QQ+74880C-6537150Q-183600000R+13113140625}{9922500}$ = 1 Q tollatur fractio per multiplicationem in crucem & fiet æquatio huiuſmodi 1521 QQ + 74880 C - 6537150 Q - 183600000 R + 13113140625 = 9922500 Q; & per antitheſin 1521 QQ + 74880 C - 183600000 R + 13113140625 = 16459650 Q. & rurſus per antitheſin 16459650 Q + 183600000 R - 74880 C - 521 QQ = 13113140625; Omnibus diuiſis per 1521, fiet æquatio huiuſmodi

$\frac{16459650Q}{1521}$ + $\frac{183600000R}{1521}$ - $\frac{74880C}{1521}$ - 1 QQ = $\frac{13113140625}{1521}$, quæ per Iſomœriam reuocabitur ad hanc

25035127650 Q + 424747767600000 R - 74880 C - 1 QQ =

46141781761334390625. Huius æquationis radix eſt 38025, vt patebit, qua diuiſa per 1521 prodibit 25, radix prioris illius æquationis. Æquationem illam per numeros fractos rectè ſe habere conſtat. Quandoquidem multiplicato numero quadratorum per 625, quadratum ex 25, producetur numerus 10287281250, quo diuiſo per 1521, proſilit in quotiente 6763498 $\frac{772}{1521}$ deinde ducto 183600000 in 25, radicis pretium fit 4590000000, quo diuiſo per 1521, ſit quotiens 3017751 $\frac{729}{1521}$, & eſt radicum pretium, quo addito ad pretium quadratorum ſuperiùs habitum 6763498 $\frac{772}{1521}$, fit ſumma 9781250; ab hac ſumma ſubducatur 390625, numerus quadrato-quadratorum, fiet reſiduum 9390625, ab hoc tandem reſiduo, ſubducatur pretium cuborum, quod quidem ut

ex multi-

ex multiplicatione numeri 15625, cubi ex 25, in numerum cuborum 74880, & productum 1170000000, diuidatur per 1521, orietur pretium cuborum 769230 $\frac{1170}{1521}$, & remanebit 8621394 $\frac{351}{1521}$, quantum plane fit diuidendo numerum abſolutum ſupradictum 13113140625 per 1521.

Æquationem hanc per Iſomœriam reuocari ad illam, ſuperiorem patet, ſiquidem pretium quadratorum eſt 36198306716089781250, pretium autem radicum eſt, 16151033862990000000, horum ſumma eſt 52349340579079781250, à qua ſi ſubtrahatur quadrato-quadratum radicis (eſt enim radix huius æquationis 38025, numerus habitus per multiplicationem 25, in 1521) nempe 2090628617375390625, & remanebit 50258711961704390625, numerus abſolutus totius æquationis, ſiue comparationis homogeneum. Radix autem hunc in modum extrahetur.

Propoſita æquatio ſit huiuſmodi.

$$25035127650\,Q + 42474775600000\,R - 74880\,C - 1\,QQ = 46141781761334390625.$$

Cùm autem depræhenſum fuerit radicem vniuerſam pluribus ſingularibus lateribus, puta quinque conſtare, ſitque eadem lex obſeruanda, non ſecus ac ſi radix binomia foret; quandoquidem priora quotcunque ſingularia latera ſimul comparatione ſubſequentis vnius munere funguntur. Proinde fingendum eſt eam eſſe binomiam, nempè $a + e$; coefficiens autem ſub quadrato ſit b pl. coefficiens ſub latere ſit d ſol. coefficiens ſub cubo ſit f. Comparationis homogeneum ſit z pl. pl.

Quadratum ex $a + e$ eſt $a^2 + 2ae + e^2$, quo ducto in b pl. fit b pl. $a^2 +$ 2 b pl. $ae +$ b pl. e^2. Radix $a + e$ ducatur in d ſolidum, & fiet d ſolidum $a +$ d ſolido e; horum aggregatum eſt b pl. $a^2 +$ 2 b plano $ae +$ b plano $e^2 +$ d ſolido $a +$ d ſol. e; ex hoc ſubtrahatur productum, quod fit ex $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3$; cubo nimirum ipſius $a + e$, in f, longitudinem. Illud autem eſt $fa^3 + 3fa^2e + 3fae^2 + fe^3$; factaque ſubtractione, remanebit b pl. $a^2 +$ 2 b pl. $ae +$ b pl. $e^2 +$ d ſol. $a +$ d ſol. $e - fa^3 - 3fa^2e - 3fae^2 - fe^3$, ex quo etiam ſubtrahere oportet quadrato-quadratum eiuſdem radicis & remanebit.

b pl. $a^2 +$ 2 b pl. $ae +$ b pl. $e^2 +$ d ſol. $a +$ d ſol. $e - fa^3 - 3fa^2e - 3fae^2 - fe^3 - a^4 - 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - e^4$. Et hoc æquabitur z pl. pl. Comparationis homogeneo addatur a^4, & fa^3 ob notam defectus & proueniet b pl. $a^2 +$ 2 b pl. $ae +$ b pl. $e^2 +$ d ſol. $a +$ d ſol. $e - 3fa^2e - 3fae^2 - fe^3 - 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - e^4 =$ z pl. pl. $+ a^4 + fa^3$. Hinc autem ſubtrahantur b pl. a^2, & d ſol. a, vt remaneat æquatio

2 b pl. $ae +$ b pl. $e^2 +$ d ſol. $e - 3fa^2e - 3fae^2 - fe^3 - 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - e^4 =$ z pl. pl. $+ a^4 + fa^3 -$ b pl. $a^2 -$ d ſol. a.

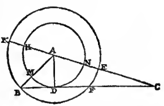
Hoc autem eſt illud reſiduum diuiſiſſe per diuiſores illos, &c. Diuiſores autem ſigillatim accepti ſunt 2 b pl. a; b pl; d ſol; $3fa^2$; $3fa$; f; $4a^3$; $6a^2$; & $4a$.

Quoniam verò quæſita radix pluribus quàm duobus ſingularibus lateribus conſtat; propterea in eligendis diuiſoribus, ijſdemque proprijs ſedibus collocandis, oportet cautum eſſe Analyſtam, qui in memoriam ſi reuocauerit, quæ iam ſuo loco explicuimus, nempe adhibendas eſſe cyphras, eaſque apponendas, vt ratio dictat, certe reſolutionem ſine errore perficeret.

Diuiſione igitur inſtituta fiet quotiens pro ſecundo ſingulari latere.

At verò inueſtigaturi tertium, vtemur duobus iam elicitis tanquam vno, & iuxta legem præſcriptam operabimur. Iam enim omnis eſt operatio perficienda, ea ratione, vt duo priora ſingularia, quæ eliciuntur latera, vnius munere fungantur. Deinde procedendum omnino quemadmodum fit in ſingulari latere primo tractando; duo enim, vel tria, vel plura ſint, nihil refert, eadem ſiquidem præcepta de ijs intelligenda ſunt, non ſecus ac vnum ſingulare latus foret &c.

In trian-



In triangulo A B C, data ſit baſis B C, nempe b; itidem data ſit perpendicularis A D, nimirum d; atque demum data ſit proportio, quam habet aggregatum ex latere A B, & perpendiculari A D, ad aggregatum ex alio latere A C, & ex eadem perpendiculari A D, vt S, ad R, quærantur latera. Centro A, interuallo A D, deſcribatur circulus; deinde eodem centro A, interuallo autem A B, alter circulus deſcribatur, & quærantur latera A B, A C. Protrahatur C A, vſque ad K. Latus A B eſto a. K N, erit $a + d$; vt igitur s, ad r, ita debet eſſe $a + d$, nempè K N, ad aggregatum ex A D, A C, puta H C. Vt igitur s, ad r, ita $a + d$, ad $\frac{ra + rd}{s}$ ſingula aſſequemur; propterea quod cùm iam ſupra dictum fuerit,

Datum ſit triangulum A B C, cuius baſis B C. ſit data b; ſit itidem data perpendicularis A D, d; ſit demum data proportio vt s, ad r. Suppoſuimus autem A B, eſſe a; fecimus verò vt s ad r, ſecundum datam rationem, ita K N, $a + d$, ad $\frac{ra + rd}{s}$ pro H C; Proinde ſi ex H C, puta $\frac{ra + rd}{s}$ auferamus H E, nimirum $a + d$, remanebit $\frac{ra + rd}{s} - a - d$, pro E C; Si verò ab A E, puta a, auferamus A H, nempè d, remanebit $a - d$ pro N E; atque adeo H K, erit $a - d$. Quamobrem ſi ipſi H C, nempe $\frac{ra + rd}{s}$ addamus $a - d$, fiet ſumma $\frac{ra + sa + rd - sd}{s}$ pro K C; vt igitur b, ad $\frac{ra + sa + rd - sd}{s}$ ita $\frac{ra + rd}{s} - a - d$, ſeu $\frac{ra - sa + rd - sd}{s}$, ad fractionem hanc nimirum.

$$\frac{r^2a^2 - s^2a^2 + 2r^2da - 2srda + r^2d^2 - 2srd^2 + s^2d^2}{bs^2};$$

$$\begin{array}{r} ra + sa + rd - sd \\ ra - sa + rd - sd \\ \hline - srda - s^2da - srd^2 + s^2d^2 \\ + r^2da + srda + r^2d^2 - srd^2 \\ - sra^2 - s^2a^2 - srda + s^2da \\ r^2a^2 + sra^2 + r^2da - srda \\ \hline \end{array}$$

Hoc productum $\frac{r^2a^2 - s^2a^2 + 2r^2da - 2srda + r^2d^2 - 2srd^2 + s^2d^2}{s^2}$

Diuidatur per b, fiet

Quotiens $\frac{r^2a^2 - s^2a^2 + 2r^2da - 2srda + r^2d^2 - 2srd^2 + s^2d^2}{bs^2}$. pro F C.

Quo ſubtracto ex b, remanebit fractio, cuius dimidium erit.

$$\frac{b^2s^2 - r^2d^2 + 2srd^2 - s^2d^2 - r^2a^2 + s^2a^2 - 2r^2da + 2srda}{2bs^2}$$ pro BD, vel DF.

Ad Climacticum nimirum aſcenſum euitandum obſeruetur $r^2 - s^2$, quæ cæteris notis magnitudinibus depreſſior eſt. Applicetur $2bs^2$ ad $r^2 - s^2$, hoc autem facto paraboliſmo prouenict nota quædam magnitudo; eaque appelletur c. Applicetur deinde plurinomium hoc. $b^2s^2 - r^2d^2 + 2srd^2 - s^2d^2$, ad $r^2 - s^2$, & proueniet planum non ignotum g^2. Cæterum a^2 per ſe ſubſiſtet. Applicetur denique $2r^2d + 2srd$, ad r^2, & prouenit latus f. Itaque fractioni

$$\frac{b^2s^2 - r^2d^2 + 2srd^2 - s^2d^2 - r^2a^2 + s^2a^2 - 2r^2da + 2srda}{2bs^2}$$

Æquipollet huic $\frac{g^2 - a^2 - fa}{c}$. Huius quadratum eſt $\frac{a^4 + 2fa^3 - 2g^2a^2 - f^2a^2 - 2g^2fa + g^4}{c^2}$. Huic

$$\begin{array}{r} g^2 - a^2 - fa \\ g^2 - a - fa \\ \hline - g^2fa + fa^3 + f^2a^2 \\ - g^2a^2 + a^4 + fa^3 \\ g^4 - g^2a^2 - g^2fa \\ \hline \frac{a^4 + 2fa^3 - 2g^2a^2 - f^2a^2 - 2g^2fa + g^4}{c^2} \end{array}$$

addatur quadratum perpendiculi nempe d^2, & fiet.

$$\frac{a^4 + 2fa^3 - 2g^2a^2 - f^2a^2 - 2g^2fa + g^4 + c^2d^2}{c^2}$$

Quamobrem fiet æquatio

$a^4 + 2fa^3 - 2g^2a^2 - f^2a^2 - 2g^2fa + g^4 + c^2d^2 = c^2a^2$; & per antitheſin ſeu metatheſin fiet,

$c^2a^2 +$

$c^2 a^2 + 2 g^2 a^2 + f^2 a^2 + 2 g^2 f a - 2 f a^3 - a^4 = g^4 + c^2 d^2$. Et per ſpecierum Metamorphoſin noua proueniet æquatio, eaque ſimplicior, & in primis explicabilis. In locum igitur $c^2 + 2 g^2 + f^2$, intelligatur ſubſtitui h^2, & loco $2 g^2 f$ intelligatur $K l^2$, & loco $2 f$, ſubrogetur m; denique loco $g^4 + c^2 d^2$, intelligatur n^4. Proueniet igitur æquatio noua minus implicata $h^2 a^2 + k l^2 a - m a^3 - a^4 = n^4$. Cùm autem ad hanc formam ſit redacta, eaque ſit huiuſmodi, vt in ipſa $a^2 + a - a^3 - a^4 - n^4 = 0$; ſupereſt tantummodo, vt hæc quadrato-quadratica æquatio ad cubicam reuocetur, & ad illam in qua elatior poteſtas trinam dimenſionem habeat, cuius inquiſitum latus ſi non reperiatur, vt Problemati Geometricè ſatisfiat, ad vnam ex conicis ſectionibus conſugiendum erit. Sic enim quæſiti trianguli latus minus innoteſcet. Sin autem inuenti lateris præſidio, duabus alijs æquationibus ordinatis iuxta Artis præcepta, quod quæritur feliciſſimè conſequemur; & vt in arenam deſcendamus, ſuperiorem æquationem repetamus.

$$h^2 a^2 + K l^2 a - m a^3 - a^4 - n^4 = 0$$

Huius æquationis Radix comparabitur ſic

25031127650 Q + 4247477676000000 R − 74880 C − 1 QQ = 4614178176133439062 5.

Secundus terminus tolletur diuidendo 74880, numerum cuborum per 4; ex ponentem maioris characteris, fit enim quotiens 18720, Itaque cum in æquatione, tàm primus, quàm ſecundus terminus eodem ſigno − afficiatur; propterea vera radix augenda eſt, & quidem incremento quartæ partis ſuperiùs inuentæ.

Supponamus igitur $a - 18720$, æquari veteri, veræque radici; rurſus nouæ poteſtates ſic ſe habent,

$a - 18720$
$a - 18720$

00000
37440
131040
149760
18720

$- 18720 a + 350438400$
$a^2 - 18720 a$

$a^2 - 37440 a + 350438400$
$a - 18720$

$- 18720 a^2 + 700876800 a - 6560206848000$
$a^3 - 37440 a^2 + 350438400 a$

$a^3 - 56160 a^2 + 1051315200 a - 6560206848000$
$a - 18720$

$- 18720 a^3 + 1051315200 a^2 - 19680620544000 a + 122807072194560000$
$a^4 - 56160 a^3 + 1051315200 a^2 - 6560206848000 a$

$a^4 - 74880 a^3 + 2102630400 a^2 - 26240827392000 a + 122807072194560090$

Specie-

Speciebus autem abſoluetur hunc in modum

Supponamus $e - \frac{1}{4} m$ æquari a; inde poteſtates ortæ ſunt, vt ſequuntur.

$$e - \tfrac{1}{4} m$$
Radix $e - \frac{1}{4} m$

$$-\tfrac{1}{4} m e + \tfrac{1}{16} m^2$$
$$e^2 - \tfrac{1}{4} m e$$

Quadratum $e^2 - \frac{1}{2} m e + \frac{1}{16} m^2$

$$e - \tfrac{1}{4} m$$

$$-\tfrac{1}{4} m e^2 + \tfrac{1}{8} m^2 e - \tfrac{1}{64} m^3$$
$$e^3 - \tfrac{1}{2} m e^2 + \tfrac{1}{16} m^2 e$$

Cubus $e^3 - \frac{3}{4} m e^2 + \frac{3}{16} m^2 e - \frac{1}{64} m^3$

$$e - \tfrac{1}{4} m$$

$$-\tfrac{1}{4} m e^3 + \tfrac{3}{16} m^2 e^2 - \tfrac{3}{64} m^3 e + \tfrac{1}{256} m^4$$
$$+ e^4 - \tfrac{3}{4} m e^3 + \tfrac{3}{16} m^2 e^2 - \tfrac{1}{64} m^3 e$$

Quadrato-quadratum $e^4 - m e^3 + \frac{6}{16} m^2 e^2 - \frac{4}{64} m^3 e + \frac{1}{256} m^4$

In hac autem æquatione $h^2 a^2 + K l^2 a - m a^3 - a^4 - n^4 = 0$.

Tollendus eſt ſecundus terminus iuxta Artis præcepta.

$-e^4 + m e^3 - \frac{6}{16} m^2 e^2 + \frac{4}{64} m^3 e - \frac{1}{256} m^4$	Pro $-a^4$
$-m e^3 + \frac{3}{4} m^2 e^2 - \frac{3}{16} m^3 e + \frac{1}{64}$	Pro $-m a^3$
$+h^2 e^2 - \frac{1}{2} h^2 m e + \frac{1}{16} h^2 m^2$	Pro $+h^2 a^2$
$+K l^2 e - \frac{1}{4} K l^2 m$	Pro $+K l^2 a$
$-n^4$	Pro n^4

Seu
$$-e^4 * + \tfrac{3}{8} m^2 e^2 - \tfrac{2}{16} m^3 e - \tfrac{3}{256} m^4$$
$$+ h^2 e^2 - \tfrac{1}{2} h^2 m e - \tfrac{1}{4} K l^2 m$$
$$- \tfrac{6}{16} m^2 e + \tfrac{4}{64} m^3 e - n^4$$
$$+ K l^2 e + \tfrac{1}{16} h^2 m^2$$
$$+ \tfrac{4}{64} m^4$$
Hoc æquabitur 0.

Et per ſpecierum metamorphoſin rurſus ordinabitur æquatio.

Nempe ſumatur quæcunque longitudo pro vnitate & appelletur u; fiat autem rectangulum ſub u, & p, æquale coefficienti ſub quadrato, ſub eiuſdem vnitatis quadrato, & ſub q longitudine; fiat ſolidum æquale coefficienti ſub latere; demum ſub eiuſdem vnitatis cubo, & ſub r longitudine fiat plano-planum æquale comparationis homogeneo; ita vt ſit æquatio $e^4 * + u p e^2 - u^2 q e - u^3 r = 0$. Cumque vnitas ſupponatur u, ea de medio ſublata fiet $e^4 * + p e^2 - q e - r = 0$. Seu $e^4 = * + p e^2 - q e - r$. Itaque p afficitur affirmatè q, & r negatè.

Propterea deſcripta ſit Parabole A B C, cuius axis B D; latus autem rectum æquale aſſumptæ magnitudini pro vnitate, quæ ſit T. Mox autem ſumatur B X, æqualis dimidio ipſius T, vt punctum X, ſit intra Parabolen, cuius vertex B; fiat autem X F, æqualis $\frac{1}{2}$ p. & accipiatur in B X, protracta ad partes X, cùm p, afficiatur nota †, & ex puncto F, erigatur perpendicularis F G æqualis $\frac{1}{2}$ q.

Deinde ſuper G B, deſcribatur ſemicirculus G I B, & protracta G B, ad partes B, accipiatur B L, æqualis T, lateri recto; & ſumatur H B, æqualis r. Super H L, deſcribatur ſemicirculus; mox accepta perpẽdiculari BK, interuallo BK, deſcribatur arcus KI, ſecans peripheriam G IB in I. Tunc centro G, ad interuallum G I, deſcribatur circulus ſecans parabolen in A, S, C, ex hiſce punctis ducantur ad axem perpendiculares, A Y, S V, D C.

Dico D C, eſſe propoſitæ æquationis radicem.

Quandoquidem B X, eſt $\frac{1}{2}$ ſiquidem dimidium eſt lateris recti, quod velut 1. aſſumpſimus, atque X F: eſt $\frac{1}{2}$ p; proinde cum B D, ſit quadratum ipſius D C, ſi D C, ſupponatur a; certè B D, erit a^2, hoc enim eſt propter naturam paraboles, vt ex Elementis Conicis manifeſtum eſt; Si igitur ex B D, quam dicimus eſſe a^2. auferatur $\frac{1}{2}$ p, & rurſus $\frac{1}{2}$ remanebit $a^2 - \frac{1}{2} p - \frac{1}{2}$. cuius quadratum eſt $a^4 - p a^2 - a^2 \maltese \frac{1}{4} p^2 \dagger \frac{1}{2} p \dagger \frac{1}{4}$. Itaque tantum erit quadratum ex D F, ſiue E G. Quoniam autem D C, ſupponitur a. & E D, ſupponitur $\frac{1}{2}$ q: tota E C, erit $a \dagger \frac{1}{2} q$, cuius quadratum eſt $a^2 \dagger q a \dagger \frac{1}{4} q^2$. horum autem quadratorum aggregatum erit $a^4 - p a^2 \dagger q a \maltese \frac{1}{4} q^2 \dagger \frac{1}{4} p^2 \dagger \frac{1}{2} p \dagger \frac{1}{4}$, tantumque erit quadratum ex G C, atque adeo eius latus quadratum erit ipſa G C.

Hoc Problema iam pridem ab Authore propoſitũ fuit reſoluendum Iſmali Bullialdo Mathematico Celeberrimo, Ipſe verò in vno caſu ſolutionẽ attulit.

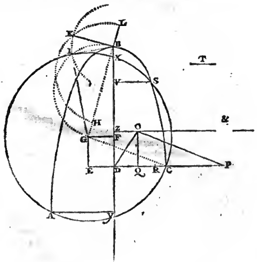
Quoniam autem H B, eſt r; factaque eſt B L, æqualis lateri recto quod eſt. 1. eſtque B K, media proportionalis inter H B, & B L, propterea B K, erit ℞ r. & B K. quadratum erit r; eſt autem I B, æqualis B K; proinde quadratum I B, erit r. Quoniam verò B F; eſt $\frac{1}{2} p \dagger \frac{1}{2}$. & G F. eſt $\frac{1}{2}$ q: horum quadrata ſi ſimul addantur, faciunt $\frac{1}{4} q^2 \dagger \frac{1}{4} p^2 \maltese \frac{1}{2} p \dagger \frac{1}{4}$. tantumque erit quadratum ex G B, ex quo ſi ſubtraxeris r. quadratum ipſius I B, remanebit $\frac{1}{4} q^2 \dagger \frac{1}{4} p^2 \dagger \frac{1}{2} p \maltese \frac{1}{4} - r$, pro quadrato ipſius G I; erat autem eiuſdem quadratum idem quod quadratum G C; nempe $a^4 - p a^2 \dagger q a \dagger \frac{1}{4} q^2 \dagger \frac{1}{4} p^2 \dagger \frac{1}{2} p \dagger \frac{1}{4}$, erit proinde æquatio $a^4 - p a^2 \dagger q a \dagger \frac{1}{4} q^2 \dagger \frac{1}{4} p^2 \dagger \frac{1}{2} p \dagger \frac{1}{4} = \frac{1}{4} q^2 \dagger \frac{1}{4} p^2 \dagger \frac{1}{2} p \dagger \frac{1}{4} - r$, & per antitheſin proueniet demum æquatio inter a^4 & $\maltese p a^2 - q a - r$, itaut hæc ſit æquationis formula $a^4 * \maltese p a^2 \dagger q a - r$.

Hoc idem Problema generali ratione ab Authore adinuenta ut ſupra explicatu, reſolui facilius poteſt. &c.

Quoniam verò huius æquationis radix excedit latus quæſiti trianguli quarta parte coefficientis ſub cubo; propterea ſecetur R C, æqualis huiuſmodi quartæ parti; mox autem protracta D C, vſque ad P, ita vt D P, ſit æqualis datæ trianguli baſi. Deinde ſecta DZ, quæ ſit æqualis perpendiculari datæ, ex Z agatur Z &, parallela ipſi D P, centro autem D, ad interuallum D R, deſcribatur arcus R O, ſecans F O & in O; agantur D O, O P. Dico triangulum D O P. Problemati ſatisfacere.

Eius enim baſis D P, eſt æqualis datæ baſi, eius etiam perpendicularis quæ eſt æqualis D Z, æqualis eſt perpendiculari datæ.

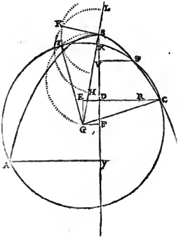
Dico iam aggregatum ex latere D O, & perpendiculari O Q, ad aggregatum ex eadem perpendiculari, & latere O P, habere datam rationem, &c.



27137758050
Digitized by Google

$$27137758050\,e^2 - 565049066400000\,e - 44953368676760950625 - e^4 = 0$$

Huius æquationis radix eſt 56745.



$BL = 1$
$XF = \frac{1}{2}p = 13568879025.$
$GF = \frac{1}{2}q = 282524533200000$
$BX = \frac{1}{2}.$
$BH = r = 44953368676760950625.$
$BK = \text{R}\,r = \text{R}\,44951368767609506 25.$
$DC = e = 56745.$
$DC\ \text{Quadr.} = 3219995025.$
$BD = 3219995025.$
$BF = 13568879025\frac{1}{2}.$

Quonlam autem poteſt contlngere vt $\frac{1}{2}$ p. quantltas ſuperet quadratūm lpſius D C; Proinde tunç ita procedendum erit.

Sit expoſita quædam Parabole, cuius axis B Y; accipiatur latus eius rectum vnitatis loco, atque eius dimidium ſignetur in axe ſitque B X; mox verò ſecetur X F, æqualis $\frac{1}{2}$ p; fiat verò G F, æqualis $\frac{1}{2}$ q; agatur G B, ſuper quam deſcribatur ſemirculus G I B; deinde protrahatur G B, ad L, vt B L, ſit æqualis B, vnius dimldio; deinde facta ſit B H, æqualis R, & ſuper H L, deſcribatur ſemicirculum priorem ſecans in I; poſtmodum autem agatur GI. Centro G, interuallo autem G I, deſcribatur circulus ſecans parabolen in A, S, C; agaturque C D, perpendicularis ad YB, itempe SV; præterea A Y. Protrahatur CI, ad E, agaturque C E, parallela axi. Dico DC, eſſe radicem æquationis propoſitæ.

Quandoquidem D C, eſto a, & ob naturam paraboles B D, debet eſſe a^2. Hunc enim in modum ducta BD, in latus rectum poſitum vnum producetur quadratum ipſius DC. Quoniam igitur F B, eſt $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}$ ſi ex ipſo auferatur BD, quod eſt a^2, remanebit $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - a^2$.

Huius autem quadratum eſt $a^4 - p\,a^2 - a^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$, eritque quadratum reſidui DF. Et quoniam DC eſt a, & GF, ſiue G D, eſt $\frac{1}{2}$ q; propterea tota E C, erit $a + \frac{1}{2}q$. cuius quadratum eſt $a^2 + q\,a + \frac{1}{4}q^2$, quo addito ad $a^4 - p\,a^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$; proueniet $a^4 - p\,a^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} + q\,a + \frac{1}{4}q^2$. At verò quoniam D B eſt $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}$ eius quadratum

eſt

eſt $\frac{1}{4}p^2 \ast \frac{1}{2}p \ast \frac{1}{4}$; cuĩ ſi addatur quad. ex E D, vel GF; fiet $\frac{1}{4}p^2 \dagger \frac{1}{2}p \dagger \frac{1}{4} \ast \frac{1}{4}q^2$; ex quo ſi ſubducatur quadratum ex B K, ſiue B I, remanebit, $\frac{1}{4}p^2 \ast \frac{1}{2}p \ast \frac{1}{4} \dagger \frac{1}{4}q^2 - r$; & hoc erit quadratum ipſius G I, cui æquale eſt quadratum G C, ſuperius habitum, quamobrem erit æquatio inter hæc; nimirum $a^4 \ast p a^2 \maltese q a \maltese \frac{1}{4}p^2 \maltese \frac{1}{2}p \maltese \frac{1}{4}q^2 \maltese \frac{1}{4} = \frac{1}{4}p^2 \maltese \frac{1}{2}p \maltese \frac{1}{4}q^2 - r$; & per antitheſin proueniet $a^4 = p a^2 - q a - r$.

Si itaque ex D C, radice æquationis, ſubtrahatur R C, quarta pars coefficientis ſub tubo, remanebit D R, pro latere quæſiti trianguli, videlicet pro latere illo, quod ponebatur radix.

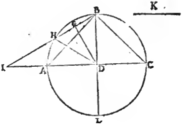
Cùm Venetias me contuliſſem, caſu quidem incidi in Virum honeſtum, grauem, officij plenum, cùm virtutibus, tùm etiam ſatis amplâ fortunâ exornatum, &, vt verbo dicam, numeris omnibus abſolutum, qui ſummis, egregijſque laudibus Illuſtriſs. ac Excellentiſs. D. Io: Baptiſtã Cornelium Piſcopiæ, D. Marci Procuratorem Ampliſſimum, extollebat, ob oculos ponens ſanguinis claritudinem, atque magnificentiam, cum incomparabili humanitate coniunctam, cuius famâ vehementer incitatus, ſplendidiſſimam eius Domum adij; ab hoc præclariſs., omnique laudationis genere præſtantiſs. Senatore beneuolè, ac humaniter exceptus: ſecum precibus egi, vt Bibliothecam, & mirè ornatam, & copioſam, quam apud ipſum extare iàm pridem audieram, mihi pro ea, qua pollebat humanitate, oſtenderet. Eam igitur ingreſſus, Archimedis operibus euolutis, quæ ſuper tabulam aduerteram, incidi in Lemma illud de applicatione rectæ inter conuexum peripheriæ, & diametrum productam. Tùm extẽplo, ecce Virgo ſpecie pulcherrima, membrorum apta diſpoſitione, cum quadam ſuauitate coloris, maieſtate capitis, oris dignitate, ſpectabilis, quæ disertè admodum ea de re ſermonem inſtituit; hinc sẽſibus etſi quodammodo deſtitutus, vt vox faucibus hæſerit; non nihil tamen collectis viribus, petij ab Excellentiſs. Senatore, vt mihi quidem Nomen, Genus, Patriam Inclytæ Virginis, tot ſingularibus, & corporis, & animi dotibus, velut è Cœlo delapſæ, innueret; quod ſine piaculo tacere non poſſum. Ipſe verò ſubridens ait, nomine quidem Helenam Corneliam vocari. Tùm ego, tanti ne fortaſſis Herois filia? annuit; tùm, non mirum. Hanc noſtri æui rectè dixeris Literarum miraculum Venetam Mineruam, omnes ſibi gratias conciliantem; vt omnibus ſcientijs exculta, Virgo quidem Encyclopędica dicenda videatur. Studijs bonarum Artium miro ordine operam nauauit; præmiſſa etenim Grammatice, & Humanioribus literis, præſertim Rethoricæ, ſtuduit. Linguas percallet quatuor exoticas, Græcam, Latinam, Gallicam, Hiſpanicam, in quibus disertè loquitur. His porrò non contenta, ſummi, ac illuſtris ingenij alis, ad altiores Doctrinas euecta, Dialecticæ, Philoſophiæ ſedulò operam dedit, ad Theologiæ culmen aſcendens, excelſæ Doctrinæ penitiora quidem arcana peruadens; nec Mathematicas Diſciplinas neglexit, aduertens, magni faciendum illud Platonis adagiũ: Οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω; cuius ſupra quoque meminimus; & quidem par erat, vt in Aſtronomiam incumberet Virgo vitæ inſtituto puriſſima, quæ cogitatione ſaltem Cæli Galaxiam frequentaret. In hiſce porrò ſtudijs tantum profecit, vt erudito genere loquendi cunctis haud mediocrem admirationem inijciat: quodque etiam in primis eſt commendabile, ingenio pollet ſubtili, acri, & acuto, vt Muſicen colat, concentum cieat ſuauiſſimum, Vocem fidibus ludens ſic attemperet, vt Adſtantium aures demulceat. Muſa Veneta, Syren Adriaca; multò tamen ſuauior pulchritudinis harmonia, Cælitùs illi collata, cui animi virtutum melodia cæleſtis omninò reſpondet, ab Angelorum Choro deducta, adeò vt Principes multitudine plures ad ſui amorem alliciat, inter quos reticere non poſſum, Lantgrauium Haſſiæ Sereniſſimum, qui vnà cum Nuru Domum eius adiens, munificentiſſimè, ac ſingulariter exceptus, ſummis honoribus illam eſt proſecutus. Paria, nè maiora dicam, æſtimationis obſequia Sereniſs. Cardin. Coglionus Illuſtriſs. Helenæ, ſingulares, atque præclariſſimas virtutes admirans, præſtitit. Nec deſunt huius ordinis, qui ad Thalamos ſacro iure connubij auidè peterent, niſi vni Chriſto eam addictam eſſe certò cognoſcerent. Cæterum multùm Illa Fortunæ debet, quòd ipſa ſit nacta Præſtantiſſimum huius ætatis, Doctiſſimum, Omniſcium, & Græcæ, & Latinæ Linguæ ad ſtuporem vſque Peritum, Illuſtriſs. ac Reuerendiſs. D. Aloyſium Gradenicum Archipræſbyterum, atq; Primatem Præclariſſimæ Vrbis Cydoniæ è Creta, Bibliophylacem Seren. Reipub. Ven., Virum ſuo nomine celeberrimum; Illam enim ſummâ diligentia, ſummâque cura inſtruxit; nam aduertens viuido eſſe quidem ingenio, omnes eam diſciplinas docuit, vt eandem ſibi parem redderet; quo nihil exaggeratius dicere licet; nam vterq; portentum.

Helena Cornelia in ædes.

Hæc dicta ſint de egregijs dotibus, quas ætas omnis commendabit, & euehet ad Cœlum; vide & Cornelia Regia Proſapia, ac Sereniſsima Reſpublica in æternum viuet.

Sed quanti refert viam diligenter eligere, ad analyſin inſtituendam, hinc plane addiſces. Proponatur Problema de applicatione datæ magnitudinæ rectæ inter conuexum peripheriæ, & diametrum productam, quæ ad aliquod peripheriæ punctum protracta, pertingat; de quo ſupra verba fecimus. Plures quidem ſunt caſus, non æquè tamen difficiles. Si data magnitudine recta applicanda fuerit ſemidiametro æqualis; admodum facilis eſt reſolutio; tunc enim punctum in peripheria deſignatur à recta, quæ ex centro erecta ſit diametro perpendicularis.

Sit circulus A B C, cuius centrum D; ex D, erecta ſit perpendicularis D B; ita vt recta K, magnitudine data ſit æqualis ſemidiametro circuli prædicti, applicanda inter diametrum productam, ad partes exempli gratia A, & conuexum peripheriæ; vt protracta pertingat ad punctum B; Hoc nullius eſt laboris, ſi enim deſcribatur Hexagonum, cuius latus HB, hoc verò protractum ſit ad partes H, donec occurrat, diametro C A, protractæ in I; conſtat ex Elementis H I, æqualem eſſe ſemidiametro circuli; atque adeò rectæ datæ K, æqualem.



At ſi punctum B, itidem fuerit in extremitate quadrantis, recta verò applicanda, non fuerit æqualis ſemidiametro; Sit iam factum, & recta applicanda ſit b; at ſemidiameter circuli ſit d; ex centro D, cadens perpendicularis ad I B, faciat ſegmenta G B, H G, æqualia; Itaque ſegmentum B G, ſit a, proinde ſegmentum H G, erit itidem a; quare H B, erit 2 a; at ſegmentum I G, erit b † a, vt tota I B, erit b + 2 a; & quia vt patet ex Elementis, vt eſt I B, ad B D, ita B D, ad G B, erit rectangulum I B G, æquale quadrato ex B D, quare $ba + 2a^2$ æquabitur d^2; ergo $\frac{1}{2}ba + a^2$, æquabitur $\frac{1}{2}d^2$, cuius æquationis radix eſt $\sqrt{\frac{1}{16}b^2 + \frac{1}{2}d^2} - \frac{1}{4}b$; æquabitur a. Hinc.

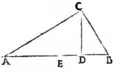
PORISMA.

Recta applicanda ſecetur in quatuor partes æquales, & quadrato vnius ex illis addatur dimidium quadrati ex ſemidiametro circuli; aggregati autem latus mulctetur eadem quarta parte datæ applicandæ; quod enim ſupereſt, erit ſegmentum G B; vnde eius duplum erit H B, quare per additionem ad datam applicandam, innoteſcet I B;

Hoc cum illo coincidit.

Dato vno ex lateribus trianguli rectanguli, dataque differentia ſegmentorum baſeos, reperire triangulum.

Sit iam factum, & triangulum illud rectangulum ſit A C B, cuius latus circa rectum ſit BC, nēpè d differentia ſegmentorum baſeos ſit A E, adeo vt ſegmentorum D B, AD, differentia AE ſit b. Oporteat reperire triangulum Segmentum DB, eſto a, at D E, erit illi æqualis itidem a; ergo E B, erit 2 a; quamobrem A B, erit b + a a; propterea cùm ſit vt A B, ad B C, ita B C, ad D B, erit rectangulum A B D, æquale quadrato B C, quare $ba + 2a^2$ æquabitur d^2; ergo $\frac{1}{2}ba + a^2$ æquabitur $\frac{1}{2}d^2$. Huius æquationis radix eſt $\sqrt{\frac{1}{16}b^2 + \frac{1}{2}d^2} - \frac{1}{4}b$, quæ æquabitur a, Hinc.



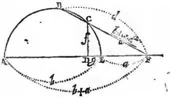
P O-

PORISMA.

Ad quadratum è quarta parte differentiæ ſegmentorum baſeos addatur, dimidium quadrati lateris dati circa rectum, aggregati latus multatum eadem quarta parte differentiæ ſegmentorum baſeos; exhibebit ſegmentum minus baſeos, vnde ſegmentum maius non latebit, quare triangulum quoque conſtabit.

PROBLEMA.

Sit circulus A B E, cuius diameter A E protracta ſit in infinitum ad partes E, datumque ſit in peripheria punctum C, aptanda ſit quædam data, vt B F, quæ tranſeundo per C, ipſa linea data B F, ſit intercepta inter peripheriam, hoc eſt inter peripheriæ concauum, & protractam diametrum A E.



Supponamus diametrum A E, eſſe b, at verò recta B F, magnitudine data ſit d, ex puncto C, cadat perpendicularis C D, quæ appelletur f, ſegmentum verò D E, ſit g, ſegmentum E F, ſit a; quoniam igitur eſt, vt B F, ad F A, ità E F, ad C F; & A F, eſt b + a, B F, eſt d, inſuper E F, eſt a, ſi fiat vt d, ad b + a, nempè B F, ad A F, ità a, hoc eſt E F, ad aliam, putà C F, hæc erit $\frac{ba + aa}{d}$, & quia angulus C D F, eſt rectus, propterea ſi à quadrato ex C F, hoc eſt ex $\frac{b^2a^2 + 2ba^3 + a^4}{d^2}$, ſi ex hoc, inquam, auferatur quadratum ex C D, nimirum f^2, remanebit $\frac{b^2a^2 + 2ba^3 + a^4}{d^2} - f^2$, & hoc erit quadratum ex D F, itaque (℞ $\frac{b^2a^2 + 2ba^3 + a^4}{d^2} - f^2$) erit D F, & quia E F, eſt a, atque D E, eſt g, ſi ex D F, auferatur a, quod remanet æquabitur D E, nempè g, proindè ℞ ($\frac{b^2a^2 + 2ba^3 + a^4}{d^2} - f^2$) $-$ a æquabitur g, & per antitheſin ℞ ($\frac{b^2a^2 + 2ba^3 + a^4}{d^2} - f^2$) æquabitur g + a, quamobrem & eorum quadrata æqualia erunt, nempè $\frac{b^2a^2 + 2ba^3 + a^4}{d^2} - f^2$ æquabitur $g^2 + 2ga + a^2$, omnibus ductis in d^2, ad tollendam fractionem, fiet $b^2a^2 + 2ba^3 + a^4 - d^2f^2$ quod æquabitur $d^2g^2 + 2d^2ga + d^2a^2$, & per antitheſin rurſus $b^2a^2 + 2ba^3 + a^4 - 2d^2ga - d^2a^2 = d^2g^2 + d^2f^2$, ſeu $a^4 + 2ba^3 + b^2a^2 - d^2a^2 - 2d^2ga = d^2g^2 + d^2f^2$, reuocetur æquatio ad analogiſmum, & fiet vt $a^3 + 2ba^2 + b^2a - d^2a - 2d^2g$ ad $dg^2 + df^2$, ità d, ad a, Hinc.

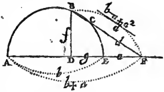
PORISMA.

Beneficio igitur Lineæ ad poſtremum genus Medicearum pertinentium, ſi fiat conſtructio, ſiue Effectio, hac reſolutis plano-planis artificio iam explicato in ſimpliciſſimas longitudines, & repetitis Analyſeos veſtigijs, regia Euclidis via, demonſtrabitur, vt ſupra docuimus, &c.

PROBLEMA.

Sit circulus A B E, cuius diameter A E, protracta ſit in infinitum ad partes E, datumque ſit in peripheria punctum B, aptanda ſit inter diametrum productam, & conuexum peripheriæ data quædam C F, quæ protracta ad partes C, perueniat ad datum punctum B.

Suppona-



Supponamus diametrum A E, eſſe b, at verò C F, magnitudine data ſit d, ex puncto B, cadat perpendicularis B D, quæ appelletur f, ſegmentum verò D E, dicatur g, at verò ſegmentum E F, eſto a. Quoniam igitur eſt vt C F, ad E F, ità A F, ad B F, & A F, eſt b † a, propterea fiat vt d, ad a, ita b † a, ad aliam, eaque erit $\frac{ba+aa}{d}$ tanta itaque erit B F; huius quadratum eſt $\frac{a^4+2ba^3+b^2a^2}{d^2}$ à quo ſi auferatur quadratum ex B D, nempè f^2, remanebit $\frac{a^4+2ba^3+b^2a^2}{d^2} - f^2$, eritque quadratum ex D F, itaque ipſa D F, erit ℞ $\left(\frac{a^4+2ba^3+b^2a^2-d^2f^2}{d^2}\right)$ à qua ſi auferatur E F, nempè a, remanebit g, ac proindè fiet æquatio ℞ $\left(\frac{a^4+2ba^3+b^2a^2-d^2f^2}{d^2}\right) - a = g$, & per antitheſin ℞ $\left(\frac{a^4+2ba^3+b^2a^2-d^2f^2}{d^2}\right) = g † a$, ergo & eorum quadrata æqualia erunt, quamobrem $\frac{a^4+2ba^3+b^2a^2-d^2f^2}{d^2}$ æquabitur $g^2 + 2ga + a^2$, & rurſus per multiplicationem fiet æquatio huiuſmodi $a^4 † 2ba^3 + b^2a^2 - d^2f^2 = d^2g^2 - 2d^2ga + d^2a^2$, ductis nimirum omnibus in d^2, & rurſus per antitheſin, fiet $a^4 † 2ba^3 \pm \frac{b^2}{d^2} a^2 - 2d^2ga = d^2g^2 † d^2f^2$, reuocata autem proportione ad analogiſmum, erit vt $a^3 † 2ba^2 \pm \frac{b^2}{d^2} a - 2d^2g$ ad $dg^2 † df^2$, ità d ad a Hinc.

PORISMA.

Beneficio igitur lineæ ad poſtremum Medicearum genus pertinentium ſi comparetur effectio, hac reſolutis plano-planis in ſimpliciſſimas longitudines, & repetitis Analyſeos veſtigijs regia Euclidis via demonſtrabitur &c. Arte, quam ſuperiùs tradidimus &c.

A P-

APPENDIX

DE MAXIMIS, ET MINIMIS.

Argumentum hoc ſubtiliter, & accuratè admodum, à Præclariſſimo Geometra Apollonio Pergæo fuiſſe tractatum Antiqua tamen Methodo, ex eius monumentis cuique perſpectum, ac manifeſtum eſſe poteſt; ſed idem non minori cum laude fuiſſe præſtitum à Franciſco Maurolyco Abbate Meſſanenſe, compertum eſt ijs, qui duos hac de re libros ab illo conſcriptos euoluerunt; adeo enim eggregie ſe geſſit, tantaque cum laude prouinciam ſuſcepit, vt Apollonij Libros defectum ſupplere contendens (hi namque nondum tunc temporis in lucem prodierant) teſtimonio Sapientum quaſi Apollonium ipſum, ferè ſuperauerit.

Cæterum haud mediocriter ad rem de qua agimus Recentiorum Analyſtarum induſtria conducit; hæc enim ſpecioſæ Logiſtices beneficio, præclara, & admiranda conſequitur; quamobrem non erit abs re ſi in hoc præſenti Capite de noua hac Methodo ſermonem inſtituamus, quod per aliquas Propoſitiones perficiemus.

PROPOSITIO I.

Maximum rectangulum contentum ſub duobus ſegmentis propoſiti lateris reperire.

Supponamus datum latus eſſe E F, ſintque ſegmenta EG, G F; ſitque rectangulum quidem maximum, quod ſub huiuſmodi ſegmentis continetur, Oporteat cognoſcere vbinam G, punctum cadat.



Latus E F, dicatur b; ſegmentum E G, ſit a; itaque G F, erit $b - a$; quamobrem rectangulum E G F, erit $ba - a^2$; Hæc igitur ſit prima æquatio.

Supponamus deinde e, æquari o; cùm ergo e nihil valeat, adhuc $a + e$ æquabitur ſegmento EG, & $b - a - e$ æquabitur ſegmento GF; Proinde rectang. EGF, æquabitur $ba - a^2 - 2ae + be - e^2$; ſed erat idem rectangulum E G F, æquale $ba - a^2$, ergo $ba - a^2$ æquabitur $ba - a^2 - 2ae + be - e^2$; & per antitheſin $ba - a^2 + 2ae + = ba - a^2 + be$; & rurſus $2ae + e^2 = be$; & per hypobibaſmum fiet $2a + e = b$. Supponamus autem e æquari o; ſeu nihilo, proinde $2a$ æquabitur b; atque adeo $a = \frac{1}{2}b$. Vnde.

PORISMA.

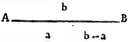
Rectangulum igitur maximum eſt ſub ſegmentis dati lateris cum ſegmenta ſunt inter ſe æqualia.

Hoc demonſtrauit Euclides Lib. 6. Propoſitione 27.

PROPOSITIO II.

Reperire maximum ſolidum, quod fieri poſſit ſub ſegmento propoſita rectæ lineæ.

Data ſit recta A B, quam oporteat ita ſecare, vt quod fit ſub altero ſegmento in alterius ſegmenti quadratum, ſit maximum omnium quæ ſub quacunque alia ſectione fieri poſſint.



Propoſita recta eſto b; & ſegmentum vnum dicatur a, alterum vero $b - a$, ſolidum autem quod fit ex $b - a$ in a^2 eſt $ba^2 - a^3$; reliquum eſt vt determinemus punctum ſectionis, atque adeo ſegmentum a, ita vt ſolidum prædictum ſit omnium maximum.

Supponamus $e = o$; atque ſegmentum vnum propoſitæ lineæ, eſto $a + e$, alterum enim erit $b - a - c$; quadratum vero ex $a + e$ erit $a^2 + 2ae + e^2$, quod ductum in b

— a

$- a - e$, facit ſolidum $ba^2 - a^3 + 2bae + be^2 - 3a^2e - 3ae^2 - e^3$, quod æquabitur $ba^2 - a^3$; & per antitheſin $2bae + be^2 - 3a^2e - 3ae^2 - e^3 = 0$. Omnibus autem applicatis ad e, quod eſt hypobibaſmum feciſſe; fiet $2ba + be - 3a^2 - 3ae - e^2 = 0$. Atque adeo, fiet etiam per antitheſin $2ba - 3a^2 = 3ae + e^2 - be$. Quoniam autem e, æquatur o, proinde $3ae + e^2 - be$, valebit o, quare per antitheſin fiet $2ba = 3a^2$. Omnibus applicatis ad a, fiet $2b = 3a$; Omnibus etiam diuiſis per 3, fiet $\frac{2}{3}b = a$. Quamobrem ſegmentum poſitum a, erit æquale duabus tertijs partibus rectæ propoſitæ lineæ.

PORISMA.

Maximum ſolidum, quod applicatur lineæ cubo deficiens, eſt illud, quod tertiæ parti propoſitæ lineæ applicatur, & cubus adiacet duabus tertijs partibus datæ rectæ lineæ.

PROPOSITIO III.

Reperire ſolidum maximum, quod applicari poſſit dato plano, deficiens ſolido ſimile dato, ſolidumque datum, cui debet aſſimilari defectus, ſit cubus.

Datum ſit planum, illudque dicatur b pl. & oporteat illud ita ſecare; vt ſi ſegmento alteri applicetur ſolidum cubo deficiens, ſit maximum omnium, quæ applicari poſſunt; deficentium figura ſimili, ſimiliterque poſita.

Quandoquidem deffectus cubus eſt; propterea oportet planum datum applicare lateri cubi deffectiui.

Latus iſtud eſto a; alterum erit $\frac{b\,pl.}{a}$; quod in duo ſegmenta diuidetur, quorum vnum erit a, alterum verò erit $\frac{b\,pl.}{a} - a$ quæ quidem pars ducta in a^2. producet ſolidum applicatum, nempe $b\,pl.\,a - a^3$. Supereſt; vt determinetur quantitas ipſius a; itaut $b\,pl.\,a - a^3$, ſit ſolidum illud maximum, applicatum b pl. deficiens cubo.

Supponamus e, æquari o. Atque latus vnum erit $a + e$, ad quod applicetur b pl. vt conſurgat latus $\frac{b\,pl.}{a+e}$ cuius ſegmentum vnum erit $a + e$; alterum verò erit $\frac{b\,pl.}{a+e} - a - e$. Poſtremum hoc ſegmentum ductum in quadratum ipſius $a + e$, hoc eſt in $a^2 + 2ae + e^2$ erit ſolidum applicatum, nimirum $b\,pl.\,a + b\,pl.\,e - a^3 - 3a^2e - 3ae^2 - e^3 = b\,pl.\,a - a^3$, & per antitheſin fiet $b\,pl.\,e - 3a^2e - 3ae^2 - e^3 = 0$. atque adeo rurſus fiet $b\,pl.\,e = 3a^2e + 3ae^2 + e^3$. Omnibus applicatis ad e, erit $b\,pl. = 3a^2 + 3ae + e^2$. Quoniam verò e, ſupponitur æquale o; proinde totum illud factum ſub e, erit æquale o. Quamobrem b pl. æquabitur $3a^2$, ac proinde tertia pars dati plani, erit quadrato ex a, æquale.

Quapropter maximum ſolidum erit, quod ad duas tertias partes propoſiti plani applicatur: Sumatur itaque tertia pars propoſiti plani, & inquiratur latus, quod illam poteſt ad quod applicatum ſit b pl. vt emergat tripla longitudo lateris, cui facta eſt applicatio, huius enim duæ partes ductæ in reliquæ partis quadratum conſtituunt maximum ſolidum applicatum deficiens cubo. Vnde.

PORISMA.

Maximum ſolidum, quod poteſt applicari dato plano deficiens cubo, eſt illud quod applicatur duabus tertijs partibus dati plani.

PROPOSITIO IV.

Reperire maximum plano-planum, quod poſſit applicari datæ lineæ deficiens plano-plano ſimili dato, atque datum, cui debeat aſſimilari defectus, ſit quadrato-quadratum.

Data ſit recta b; cui applicandum ſit plano-planum, deficiens quadrato-quadrato, quod ſit omnium maximum.

Secanda erit recta b; vt quod fit ex altero ſegmento in alterius ſegmenti cubum ſit omnium maximum.

Rectæ quidem b; ſegmentum vnum ſit a; alterum erit $b - a$; at verò plano-planum applicatum erit $ba^3 - a^4$; Oportet proinde determinare rationem partium a, & $b - a$, itaut

hoc

hoc productum ſit omnium maximum. Eſto e, æqualis o, ſeu nihilo; ſitque ſegmentum vnum $a + e$ aliud vero ſit $b - a - e$, cubus autẽ ex $a + e$ eſt $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3$ quo ducto in $b - a - e$, fit productum, vt hic à latere cernis, & inſtituta operatione ſecundum Artis pręcepta, adhibita congrui antitheſi, denique peruenitur ad æquationem compoſitam hanc videlicet $3ba^2e + 3bae^2 + be^3 = 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4$, & per hypobibaſmum proueniet æquatio $3ba^2 + 3bae + be^2 = 4a^3 + 6a^2e + 4ae^2 + e^3$. Vbi aduerte per primam antitheſin, quando nempè ſubtrahitur $ba^3 - a^4$, quod ſupereſt ęquale eſt nihilo; atque

$$
\begin{array}{r}
a + e \\
a + e \\
\hline
ae + e^2 \\
a^2 + ae \\
\hline
a^2 + 2ae + e^2 \\
a + e \\
\hline
a^2e + 2ae^2 + e^3 \\
a^3 + 2a^2e + ae^2 \\
\hline
a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3 \\
b - a - e \\
\hline
-a^3e - 3a^2e^2 - 3ae^3 - e^4 \\
-a^4 - 3a^3e - 3a^2e^2 - ae^3 \\
ba^3 + 3ba^2e + 3bae^2 + be^3 \\
\hline
ba^3 + 3ba^2e + 3bae^2 + be^3 - a^4 - 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - e^4 \\
ba^3 - a^4 \\
\hline
3ba^2e + 3bae^2 + be^3 - 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - e^4 = 0 \\
3ba^2e + 3bae^2 + be^3 = 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4 \\
3ba^2 + 3bae + be^2 = 4a^3 + 6a^2e + 4ae^2 + e^3 \\
3ba^2 = 4a^3 \\
3b = 4a
\end{array}
$$

adeò rurſus per antitheſin fit æquatio illa $3ba^2e + 3bae^2 + be^3 = 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4$; vnde omnibus applicatis ad e, fiet $3ba^2 + 3bae + be^2 = 4a^3 + 6a^2e + 4ae^2 + e^3$. Nunc autem reiectis omnibus ijs, quæ non potuerunt ab e, liberari; quandoquidem e, ſupponitur æquari nihilo, ſeu o; proinde fiet $3ba^2 = 4a^3$; omnibus autem applicatis ad a, fiet $3b = 4a$. Quamobrem a, vnde efformatur quadrato-quadratum, erit æquale tribus ex quatuor partibus ipſius b; atque adeò reliqua quarta pars eiuſdem b, erit illa, cui applicandum erit maximum plano-planum.

PORISMA.

Maximum plano-planum, quod applicatur datæ lineæ deficiens quadrato-quadrato eſt id, quod applicatur quartæ parti datæ lineæ, & quadrato-quadratum quod deficit, occupat tres quartas partes datæ lineæ.

PROPOSITIO V.

Reperire maximum plano-planum, quod poſſit applicari dato plano, cum defectu plano-plani ſimilis dato, & datum, cui debeat aſſimilari defectus, ſit quadrato-quadratum,

Datum ſit b planum, cui applicandum ſit plano-planum deficiens quadrato-quadrato ſit autem huiuſmodi plano-planum omnium maximum; eſt autem plano-plani ſegmentum futurum quadratum; vnde componitur quadrato-quadratum defficiens. Sit autem a, cui applicetur b plan. ex ipſo autem quadratum eſt a^2, quo ſubtracto ex prædicto b plano, fiet reliquum b planum $- a^2$, quod ductum in a^2, facit plano-planum b plan. $a^2 - a^4$; quod erit plano-planum applicatum cum defectu quadrato-quadrati.

At verò in locum ipſius a, ſubrogetur $a + e$, atque e æquetur o, ſeu nihilo, fiat autem quadratum ex $a + e$, quod eſt $a^2 + 2ae + e^2$, quod ſi detrahatur ex b pl. fiet reliquum b pl. $- a^2 - 2ae - e^2$, quod quidem ductum in $a^2 + 2ae + e^2$ producet plano-planum; ex b

pl. $a^2 + 2$ pl. pl. ex b pl. $ac +$ pl. pl. ex b pl. $e^2 - a^4 - 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - e^4$. Ex quo ſi dempſeris, ſuperius factum, nempe pl. pl. ex b pl. $a^2 - a^4$, fiet reliquum 2 pl. pl. ex b pl. $ac +$ pl. pl. ex b pl. $e^2 - 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - e^4 = 0$.

Per antitheſin autem fiet 2 pl. pl. ex b pl. $ac +$ pl. pl. ex b pl. e^2 æquale $4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4$; Omnibus autem applicatis ad e, fiet 2 b pl. $a +$ b pl. $e = 4a^3 + 6a^2e + 4ae^2 + e^3$; omnibus autem reiectis, quæ ſunt ſub e, cum e, æquetur o, erit 2 b pl. $a = 4a^3$, omnibuſque applicatis ad a, fiet 2 b pl. $= 4a^2$, ergo b pl. $= 2a^2$, quare $\frac{1}{2}$ b pl. æquatur a^2. Itaque a^2, occupat dimidium dati plani; & plano-planum, quod applicatur dato plano, deficiens quadrato-quadrato, eſt id, quod applicatur dimidio dati plani, ſeu duabus ex quatuor partibus dati plani, &c.

PORISMA.

Maximum plano-planum, quod applicatur dato plano, deficiens quadrato-quadrato, eſt id, quod applicatur duabus partibus ex quatuor, in quas diuiditur planum, & quadrato-quadratum, quod deficit, occupat reliquas duas partes.

PROPOSITIO VI.

Reperire maximum plano-planum, quod poſſit applicari dato ſolido, cum defectu plano-plani ſimilis dato, & datum, cui debet aſſimilari defectus, ſit quadrato-quadratum.

Sit datum b ſolid. cui ſit applicandum plano-planum deficiens quadrato-quadrato; ipſum autem plano-planum debeat eſſe omnium maximum. Cum autem ſolidi ſegmentum ex quo fieri debet quadrato-quadratum deficiens, neceſſe & ſit, eſſe cubum.

Eſto igitur a, cui applicetur b ſol. ſi autem ex a fiat cubus, proueniet a^3, quo ſubtracto a^3 ex b ſolido fiet reliquum b ſol. $- a^3$, quo ducto in a proueniet pl. pl. ex b ſol. $a - a^4$, quod erit plano-planum applicatum cum defectu quadrato-quadrati ex a.

At verò rurſus loco ipſius a, ſubſtituatur $a + e$, at vero e, iuxta hanc reſolutionis rationem æquetur o, vel nihilo, erit quidem plano-planum applicatum deficiens quadrato-quadrato, plano-planum ex b ſol. $a +$ pl. pl. ex b ſol. $e - a^4 - 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - e^4$ ex quo ſi dempſeris ſuperius iam factum, proſiliet pro differentia pl. pl. ex b ſol. $e - 4a^3e - 6$ pl. pl. $a^2e^2 - 4ae^3 - e^4$, quæ differentia æquabitur o, ſeu nihilo per antitheſin, ac omnibus applicatis ad e; fiet b ſol. æquale $4a^3 + 6a^2e + 4ae^2 + e^3$ de medio ſublatis ijs, quæ ſub e reperiuntur in æquatione, cum æquentur nihilo fiet b ſolidum æquale $4a^3$, quare $4a^3 =$ b ſol. vnde a^3 æqualem $\frac{1}{4}$ b ſol. ex huiuſmodi igitur quantitate puta a, cuius valorem expreſſimus effingi debet quadrato-quadratum, atque adeò plano-planum deficiens quadrato-quadrato applicabitur tribus ex quatuor partibus dati ſolidi &c. Hinc.

PORISMA.

Maximum plano-planum, quod applicatur dato ſolido, deficiens quadrato-quadrato, eſt illud, quod applicatur tribus ex quatuor partibus dati ſolidi, & quadrato-quadratum deficiens reliquam quartam occupat partem.

PROPOSITIO VII.

Reperire maximum plano-ſolidum, quod applicari poſſit datæ lineæ, deficiens quadrato-cubo.

Data ſit recta b, cuius ſegmentum vnum eſto a, aliud quidem erit $b - a$, quod autem fit ex $b - a$ in a^4, erit $ba^4 - a^5$; hoc erit autem plano-ſolidum quæſitum.

Supponamus verò vnum ipſius b ſegmentum eſſe $a + e$, alterum erit $b - a - e$, quadrato-quadratum ex $a + e$ eſt $a^4 + 4a^3e + 6e^2a^2 + 4ae^3 + e^4$, quod quidem ductum in $b - a - e$ facit $ba^4 + 4ba^3e + 6be^2a^2 + 4bae^3 + be^4 - a^5 - 5a^4e - 10e^2a^3 - 10a^2e^3 - 5ae^4 - e^5$. Ex quo ſi dempſeris $ba^4 - a^5$, fiet reſiduum $4ba^3e + 6be^2a^2 + 4bae^3 + be^4 - 5a^4e - 10e^2a^3 - 10a^2e^3 - 5ae^4 - e^5$. Omnibus applicatis ad e, & ijs retentis; quæ ab e non afficiuntur, ſi quidem hæc nihilo æqualia ſupponuntur, atque etiam adhibi-

ta con-

ta congrua antitheſi fiet $4\,b\,a^3 = 5\,a^4$, atque omnibus applicatis ad a^3; fiet $4\,b = 5\,a$. Vnde quatuor ex quinque partibus ipſius b, erunt æquales a. Itaque maximum plano-ſolidum, quod ipſi b, applicatur deſſiciens quadrato-cubo, erit quod applicatur quartæ parti ipſius b. Hinc.

PORISMA.

Maximum plano-ſolidum, quod applicatur datæ lineæ deficiens quadrato-cubo, eſt id, quod applicatur quintæ parti datæ lineæ, & quadrato-cubus, qui deficit, occupat reliquas quatuor ex quinque partibus propoſitæ lineæ.

PROPOSITIO VIII.

Reperire maximum plano-ſolidum, quod poſſit applicari dato plano deficiens quadrato-cubo.

Datum ſit b planum, & ita ſit inſtituenda operatio, vt præſeribitur, erit autem opus ita b planum diuedere, vt ſi ex altero ipſius ſegmento fiat quadratum, & ex eodem latere fiat cubus quod fit ex reliquo plani in hunc cubum effictum, ſit omnium maximum.

Segmentum iam dictum ſit a^2; reliquum igitur plani, erit b pl. $- a^2$, quod ductum in a^3 producat plano-ſolidum applicatum, nempe b plan. $a^3 - a^5$.

Deinde, ſegmentum ſit $a^2 + 2ae + e^2$, ſuppoſito tamen quod e æquetur o, ſeu nihilo; reliquum plani erit b pl. $- a^2 - 2ae - e^2$; quo ducto in cubum ex $a + e$, nempe in $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3$, fiet b pl. $a^3 - a^5 - 5a^4e - 10a^3e^2 +$ 3 b pl. $a^2e +$ 3 b pl. $e^2a +$ b pl. $e^3 - 10a^2e^3 - 5e^4a - e^5$, ex quo ſi auferatur ſuperius factum, nempe b pl. $a^3 - a^5$, fiet reſiduum 3 b pl. $a^2e +$ 3 b pl. $e^2a +$ b pl. $e^3 - 5a^4e - 10a^3e^2 - 10a^2e^3 - 5e^4a - e^5$. Omnibus autem applicatis ad e, ijs tantum ſeruatis, quæ ab e liberantur, & congrua adhiaita antitheſi; fiet 3 b pl. $a^2 = 5\,a^4$, facto autem paraboliſmo per applicationem ad a^2 proſiliet 3 b pl. $= 5\,a^2$, vnde ex quinque partibus in quas intelligitur b pl. eſſe diuiſum tres quidem æquales erunt ipſi a^2.

At cum ex a^2, efformandus ſit quadrato-cubus, quo applicatum maximum plano-ſolidum debet deficere; ipſum plano-ſolidum, quod applicatur dato plano, deſſiciens vt diximus erit id, quod applicatur reliquis duabus, ex quinque partibus, propoſiti plani. Hinc.

PORISMA.

Maximum plano-ſolidum, quod applicatur dato plano deficiens quadrato-cubo eſt id quod applicatur duabus ex quinque partibus dati plani, & quadrato-cubus, quo applicatum deficit, occupat tres reliquas partes eiuſdem plani.

PROPOSITIO IX.

Reperire maximum plano-ſolidum, quod poſſit applicari dato ſolido, deficiens quadrato-cubo.

Datum ſit b ſolidum, & faciendum ſit quod imperatur. Itaque b ſol. ita ſecandum erit, vt ſi alterum ſegmentum ipſius effingatur in cubum, quod fit ex reliquo ſolidi in quadratum huius effiicti cubi, ſit maximum omnium eorum, quæ fieri poſſunt, ſi quomodocunque, aliter, datum ſolidum ſecetur.

Segmentum igitur ſir a^3 reliquum itaque erit b ſol. $- a^3$; quod ductum in a^2 producit plano-ſolidum applicatum b ſolido $a^2 - a^5$.

Supponamus prædictum ſegmentum eſſe $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3$; nempe cubum ex $a + e$, fiet reliquum b ſol. $- a^3 - 3a^2e - 3ae^2 - e^3$, quo ducto in $a^2 + 2ae + e^2$, proueniet b ſol. $a^2 +$ 2 b ſol. $ae +$ b ſol. $e^2 - a^5 - 5a^4e - 10a^3e^2 - 10a^2e^3 - 5ae^4 - e^5$. Ex hoc verò demendũ eſt prius factum ſcilicet ex b ſol. $a^2 - a^5$, reliquum verò applicetur ad e; reiectis ijs, quæ cum e implicantur, & facta antitheſi, proueniet 2 b ſol. $a = 5\,a^4$, omnibus autem applicatis ad 5 a fiet $a^3 = \frac{2}{5}$ b ſolidi. At verò ex a^3 efformandus eſt a^5; ob id plano-ſolidum applicatum dato ſolido deficiens quadrato-cubo id, quod applicabitur reliquis tribus ex quinque partibus dati ſolidi. Hinc.

PORISMA.

Maximum plano-ſolidum, quod applicatur dato ſolido deficiens quadrato-cubo eſt id, quo applicatur tribus ex quinque partibus dati ſolidi, & quadrato-cubus, quo ſolidum applicatum deficit, reliquas duas occupat partes,

PROPOSITIO X.

Reperire maximum plano-ſolidum, quod poſſit applicari, dato plano-plano deficiens, quadrato-cubo.

Datum ſit b pl. pl. & oporteat facere, quod eſt iniunctum, erit ſecandum b pl. pl. itaut ſi ex altero ipſius ſegmento efficiatur quadrato-quadratum, quod fit ex reliquo plano-plani in latus ipſius quadrato-quadrati ſit maximum omnium eorum, quæ fieri poſſunt; quocunque modo plano-planum ſectum fuerit.

Segmentum primò ſit a^4; reliquum igitur erit $b\,pl.pl. - a^4$, quod ductum in a, producet plano-ſolidum applicatum $b\,pl.pl.\,a - a^5$,

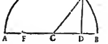
Deinde ſegmentum ſit $a^4 + 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4$, nempè quadrato-quadratum ex $a + e$, ſuppoſito tamen, quod e æquetur o, ſeu nihilo, reliquum igitur ſegmentum erit $b\,pl.pl. - a^4 - 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - e^4$, quod ductum in $a + e$ producit factum ex $b\,pl.pl.\,a + b\,pl.pl.\,e - a^5 - 5a^4e - 10a^3e^2 - 10a^2e^3 - 5ae^4 - e^5$. Ex hoc autem ſi detrahatur prius factum nempe $b\,pl.pl.\,a - a^5$ reliquum autem applicetur ad e reiectis ijs, quæ remanent implicata cum e, & congrua adhibita antitheſi, proueniet æquatio $5a^4 = b\,pl.plano$, ſi verò vtraque pars diuidatur per 5, fiet $a^4 = \frac{1}{5}\,b$ plano-plani. At cum ex a^4 effingi debeat quadrato-cubus, erit plano-ſolidum applicatum dato plano-plano deficiens quadrato-cubo, id quod applicatur reliquis quatuor ex quinque partibus, in quas dictum iam plano-planum ſupponitur eſſe diuiſum. Hinc,

PORISMA.

Maximum plano ſolidum, quod applicatur dato plano-plano, deficiens quadrato cubo eſt, id quod applicatur quatuor ex quinque partibus dati plano-plani, & quadrato-cubus quo plano-planum applicatum deficit, reliquam quintam occupat partem.

PROPOSITIO XI.

Maximum rectangulum reperire, quod ſub media, & differentia trium proportionalium comprehenditur.



Quandoquidem ſi fuerit recta diuiſa vtcunque, & ſuper ipſam deſcriptus ſit ſemicirculus; ex puncto autem diuiſionis, excitetur recta vſque ad ſemicirculi peripheriam.

Dimonſtratum eſt in Elementis hanc excitatam eſſe medio loco proportionalem inter illa ſegmenta. Deinde ſuper datam A B, diuiſam in D, intelligatur deſcriptus ſemicirculus, & ex puncto D, excitata ſit recta perpendicularis, quæ ad ipſam peripheriam perueniat in E, nam A D, D E, D B, proportionales erunt. Secetur autem F C, æqualis C D. Supponamus rectangulum maximum eſſe F D E. Oportet inquirere diuiſionis punctum D.

Supponamus A C, vel C B, eſſe b, at verò C D, C F, eſſe a. Segmentum A D, erit $b + a$, & reliquum ſegmentum D B, erit $b - a$. Itaque 2 a, æquabitur F D; Quoniam autem A D, æqualis eſt $b + a$, & D B, æqualis eſt $b - a$, erit rectangulum A D B, idem quod $b^2 - a^2$. Et quia rectangulum A D B, æquale eſt quadrato D E, ſiquidem A D, D E, D B, ſunt proportionales, latus igitur potens rectangulum A D B, æquabitur quadrato D E; atque adeò $\sqrt{(b^2 - a^2)}$ æquabitur D E; at verò ſi $\sqrt{(b^2 - a^2)}$ ducatur in 2 a, proueniet $\sqrt{(4b^2a^2 - 4a^4)}$ pro rectangulo comprehenſo ſub E D, & F D; Sectetur

autem

autem ℞($4b^2a^2 - 4a^4$) cum hoc enim inſtituenda erit comparatio, vt mox planum fiet.

Supponamus e, æquario, æquari CD, vel CF; itaque b ✠ a + e, æquabitur ſegmento AD, quemadmodum b − a − e, æquabitur DB; ac proinde ipſa differentia FD, erit 2a † 2e; rectangulum verò ſub AD, & DB, eſt $b^2 - a^2 - 2ae - e^2$; itaque ED, erit ℞($b^2 - a^2 - 2ae - e^2$), quæ ſi ducatur in 2a † 2e, nempè FD, prouenier rectangulum ſub FD, DE, nimirum ℞($4b^2a^2 - 4a^4$ + $8b^2ae$ † $4b^2e^2 - 16a^3e - 24a^2e^2 - 16ae^3 - 4e^4$) quod æquabitur ℞($4b^2a^2 - 4a^4$) atque adeo etiam $4b^2a^2 - 4a^4$ ✠ $8b^2ae$ † $4b^2e^2 - 16a^3e - 24a^2e^2 - 16ae^3 - 4e^4$, quod æquabitur $4b^2a^2 - 4a^4$, & per antitheſin $8b^2ae$ ✠ $4b^2e^2$; æquabitur $16a^3e$ ✠ $24a^2e^2$ † $16ae^3 - 4e^4$, & per hypobibaſmum $8b^2a$ † $4b^2e$, æquabitur $16a^3$ + $24a^2e$ † $16ae^2 - 4e^3$.

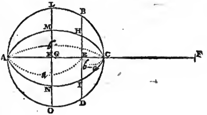
Continuanda autem æquatio eſt in ijs, quibus e, deeſt; ac proinde $8b^2a$, æquabitur $16a^3$, factoque paraboliſmo, nimirum omnibus diuiſis per 8, proueniet $b^2a = 2a^3$, & per hypobibaſmum $b^2 = 2a^2$, & rurſus per paraboliſmum $\frac{1}{2}b^2 = a^2$; atque adeo ℞$\frac{1}{2}b^2$ æquabitur a. Hinc.

PORISMA.

Eſt igitur quæſitum ſegmentum CD, id quod poteſt dimidium quadrati ipſius AC, vel CB.

PROPOSITIO XII.

A data circuli peripheria arcum abſcindere, ita vt rectangulum ſub eius corda, in ſaggitam, ſit maximum.



Datus ſit circulus ABC, cuius centrum G. diameter AC. Oportet ab eius peripheria arcum abſcindere, ita vt rectangulum ſub eius corda in ſagittam, ſit omnium maximum.

Supponamus arcum eſſe BCD, itaut corda eius ductu in ſagittam AE, faciat rectangulum omnium maximum. Inquirendum eſt igitur punctum E.

Supponamus AC, eſſe b, & AE, eſſe a ergo EC, erit b − a, rectangulum ſub his eſt $ba - a^2$, cuius latus eſt ℞($ba - a^2$) quod æquale eſt ipſi EB; Ducatur EB, nempe ℞($ba - a^2$) in AE, puta a, & proueniet ℞($ba^3 - a^4$) pro rectangulo AEB, cuius duplum erit rectangulum ſub AE, & BD, ſcilicet 2℞($ba^3 - a^4$) ſeu ℞($4ba^3 - a^4$) ſeu 4℞($ba^1 - a^4$)

Nunc ſupponamus AE, eſſe a ✠ e, nam EC, erit b − a − e rectangulum autem ſub his eſt ba † $be - a^2 - 2ae - e^2$. Itaque eius latus, puta ℞(ba † $be - a^2 - 2ae - e^2$) æquabitur BE. Si igitur ℞(ba † $be - a^2 - 2ae - e^2$) ducatur in a † e, proueniet ℞(ba^3 † &c.) quod æquabitur ℞($ba^3 - a^4$) atque adeo ba^3 † &c. æquabitur $ba^3 - a^4$. Hæc autem in ſequentibus clara, manifeſtaque fient.

$$\begin{array}{l} a+e \\ a+e \\ \hline ae+e^2 \\ a^2+ae \\ \hline a^2+2ae+e^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} b-a \\ a \\ \hline ba-a^2 \end{array}$$

$$\text{℞}(ba-a^2) \qquad \begin{array}{l} a \\ a \\ \hline a^2 \end{array}$$

$$\text{℞}(ba^2-a^4). \text{ Rectangulum } AEB.$$

$$\begin{array}{l} b-a-e \\ a+e \\ \hline be-ae-e^2 \\ ba-a^2-ae \\ \hline ba+be-a^2-2ae-e^2 \end{array}$$

$$\text{℞}(ba+be-a^2-2ae-e^2)BE.$$

$$\begin{array}{l} ba+be-a^2-2ae-e^2 \\ a^2+2ae+e^2 \\ \hline bae^2+be^3-a^2e^2-2ae^3-e^4 \\ 2ba^2e+2bae^2-2a^3e-4a^2e^2-2ae^3 \\ ba^3+ba^2e-a^4-2a^3e-a^2e^2 \\ \hline ba^3+3ba^2e+3bae^2+be^3 = ba^3-a^4 \\ -4a^3e \\ -6a^2e^2 \\ -4ae^3 \\ -a^4 \\ -e^4 \end{array}$$

$$3bae^2+be^3+3ba^2e = 4a^3e+6a^2e^2+4ae^3+e^4$$

$$3bae+be^2+3ba^2 = 4a^3+6a^2e+4ae^2+e^3$$

$$3bae+be^2 = 4a^3-3ba^2+6a^2e+4ae^2+e^3$$

$$4a^3-3ba^2 = 3bae+be^2-6a^2e-4ae^2-e^3.$$

Tandem igitur $4a^3$, æquabitur $3ba^2$, & per hypobibaſmum fiet $4a = 3b$. Inſtituto paraboliſmo, fiet $a = \frac{3}{4}b$. Vnde.

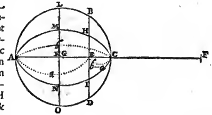
PORISMA.

Diuidatur diameter in quatuor partes æquales, quarum tres conſtituent, partem vnam; reliqua verò conſtituet partem alteram; & hoc modo rectangulum ſub ſinu recto, ſeu ſemichorda, & ſagitta, ſeu maiori parte diametri erit omnium rectangulorum maximum, quare duplum, nempe ſub eadem maiori parte diametri, & chorda erit omnium maximum. In ſupradictorum tamen declarationem, hæc adnotanda ſunt nempe, quod in illa æquatione,

b a3

$$ba^3 + ba^2e + 3bae^2 + be^3 = ba^3 - a^4$$
$$- 4a^3e$$
$$- 6a^2e^2$$
$$- 4ae^3$$
$$- a^4$$
$$- e^4$$

Vt conſtat, ex vtraque parte extat $ba^3 - a^4$; ob id, ſi fiat antitheſis, tranſpoſitione facta eorum, quæ ſigno $-$ afficiuntur, proueniet æquatio hunc in modum $3bae^2 + be^3 + 3ba^2e = 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4$; & inſtituto paraboliſmo, fiet æquatio $3bae + be^2 + 3ba^2 = 4a^3 + 6a^2e + 4ae^2 + e^3$; & per antitheſin fiet $3bae + be^2 = 4a^3 - 3ba^2 + 6a^2e + 4ae^2 + e^3$, & rurſus itidem per antitheſin fiet $4a^3 - 3ba^2 = 3bae + be^2 - 6a^2e - 4ae^2 - e^3$. Et quia e, ſupponitur æquari nihilo, & quod in nihilum ducitur facit nihil; ob id, fiat rurſus antitheſis, per additionem $- 3ba^2$, ex vtraque parte & proueniet $4a^3 = 3ba^2 + 3bae + be^2 - 6a^2e - 4ae^2 - e^3$; nam vt diximus, nihilum ductum in aliquid, vel contra, nihil facit, atque adeò $3bae + be^2 - 6a^2e - 4ae^2 - e^3$ quæ nihil propterea valent, proinde remanebit æquatio $4a^3 = 3ba^2$; hæc igitur ſimplex æquatio occurrit, atque adeò inde colligitur facto paraboliſmo ipſius a, valorem eſſe $\frac{3}{4}b$; & illud quod ſupra poſuimus Poriſma colligitur.



Illud porrò addendum eſt, quod non vna eſt linea B E, quæ ducta in A E, facit maximum rectangulum, omnium eorum ſcilicet, quæ fieri poſſunt à ſegmento diametri A C, in ſemiordinatim applicatam; atque adeò nec etiam vnicam eſſe B D, quæ ducta in prædictum ſegmẽtum, facit maximum rectangulum; ſed ſi deſcripta ſit ellipſis, circa A C, quemadmodum A H C I, adhuc rectangulum ſub H E, & A E, eſt omnium maximum, quæ fieri poſſunt à ſemiordinatim applicata in ſegmentum eiuſdem A C, atque adeò, & eius duplum, nempè ſub H I, & A E, eſt omnium maximum, quæ ſub ordinatim applicata, & ſegmento eiuſdem A C.

Hoc autem hunc in modum oſtendemus; Quoniam rectangulum abs B E, in A E, ad quodcunque aliud, factum ex ſemiordinatim applicata in circulo, in diametri ſegmentum, proportionem habet maioris inæqualitatis, vt paulò antea demonſtratum fuit; eadem autem eſt proportio rectanguli ſub H E, & A E, ad quodlibet aliud factum à ſemiordinatim applicata, in diametri ſegmentum; ergo etiam rectangulum ſub H E, & A E, eſt omnium maximum.

Quod autem rectangulum ſub H E, & A E, ad quodlibet aliud, ſenſu iam dicto, proportionem habeat maioris inæqualitatis, ſic oſtendemus: Eadem eſt proportio rectanguli ſub B E, & A E, ad quodlibet aliud à ſemiordinatim applicata circuli in ſegmentum diametri, quæ eſt rectanguli ſub H E, & A E, ad quodlibet aliud à ſemiordinatim applicata ellipſeos in idem ſegmentum diametri; ſed in circulo proportio eſt maioris inæqualitatis; ergo etiam in ellipſi.

Quod verò eadem ſit proportio, ſic oſtenditur; ſumatur quoduis punctum K, in diametro, & per illud agatur ordinatim applicata L K O, occurrens ellipſios perimetro in M N; Quoniam igitur eſt [a], vt rectangulum A E C, ad rectangulum A K C, ita quadratum E H, ad quadratum K M; vt verò rectangulum A E C, ad rectangulum A K C, ita quadratum E B, ad quadratum K L; ob id vt quadratum E B, ad quadratum K L, ita quadratum E H, ad quadratum K M; quare vt E H, ad K M, ita E B, ad K L; & permutando vt E H, ad E B, ita K M, ad K L, ergo [b] vt rectangulum A E H, ad rectangulum A E B, ita rectangulum A K M, ad rectangulum A K L; quare permutando vt rectangulum A E H, ad rectangulum A K M, ita rectangulum A E B, ad rectangulum A K L, ſeu vt A E B, rectangulum, ad rectangulum A K L, ita rectangulum A E H, ad rectangulum A K M; & quia

[a] 21 pr. Conic. Apoll.

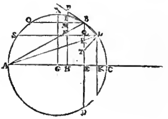
[b] pri. 6. Elem.

quia ita ſe res habet de alijs quibuſcunque rectangulis, dummodò antecedentia rectangula eiuſdem ſint altitudinis, item eiuſdem etiam altitudinis ſint conſequentia rectangula.

Quæ autem diximus de rectangulis à ſemiordinatim applicatis in ſibi reſpondentia diametri ſegmenta, eadem quoque intelligenda ſunt de rectangulis ab ordinatim applicatis in eadem diametri ſegmenta.

Imò illud itidem accedet, quod rectangulum ab aggregato ſemiordinatarum, quarum vna ad circulum, alia ad ellipſim pertinet, in diametri ſegmentum eſt maximum; vnde rectangulum ab H D, in A E, omnium eſt maximum. Vt enim rectangulum A E H, ad quodlibet aliud in ellipſi proportionem habet maioris inæqualitatis, & rectangulum A E D, ad quodlibet aliud in circulo proportionem habet maioris inæqualitatis, ita rectangulum ſub H D, & A E, ad quodlibet aliud in Figura A M H C D O, proportionem habebit maioris inæqualitatis; vnde eſt maximum.

Hinc etiam ſequitur rectangulum ſub H B, & A E, omnium eſſe maximum; non diſſimili enim diſcurſu concludetur; maximum, inquam, omnium, quæ fieri poſſunt ſub diametri ſegmento, & differentia inter ordinatim applicatas, quarum vna ad circulum, alia ad ellipſim pertinet.



Cæterùm Geometricè, quod initio propoſitum fuit, ſic oſtendemus præmiſſa Analyſi. Sit rectangulum A E B, itaut E B, ſit dimidium totius BD, ſubtendentis arcum B C D, trientem totius peripheriæ. Dico maius eſſe alio quocunque A H I, vel A K L. Intelligatur ducta PM, ad angulos rectos ipſi H I, quæ ducta intelligenda eſt parallela ipſi E B, atque adeò perpendicularis diametro A C, cum hæc ſit ad rectos angulos cum BD; & deinde acta ſit A B, item IB.

RESOLVTIO.

Quoniam igitur rectangulum ſub A E, & E B, maius eſt rectangulo ſub A H, & H I, ergo A E, ad A H, maiorem habebit rationem, quam H I, ad E B; hoc eſt B E, ad H N; ſeu H M, ad H N, maiorem habebit rationem, quàm H I, ad E B, ſeu H I, ad H M. Quod ita ſe habet. Sunt enim tres rectæ H I, H M, H N, ita vt maior ſit exceſſus rectæ H M, ſupra H N, quàm H I, ſupra H M. Quod ſic oſtendetur. Intelligatur B M, protracta ad O, erit quidem O B, ſubtendens ſextam partem totius peripheriæ, cum B D, ſubtendat trientem; eſt enim O B, parallela ipſi A C, quæ cum B D facit in E, angulos rectos; Quare arcus O B, eſt æqualis arcui A O; ſed O I, eſt minor, quàm O B; ergo minor, quàm A O; quare angulus O B I, minor erit angulo A B O, ſeu angulus M B I, minor erit angulo M B N; eſt autem angulus I M B, æqualis angulo N M B; eſt enim vterque rectus, & latus M B, vtrique triangulo commune; ergo, vt mox oſtendemus, latus M I, erit minus latere M N.

At verò, ſi latus B M, commune fuerit vtrique triangulo, angulus B M I, fuerit æqualis angulo B M N, & angulus M B I, fuerit minor angulo M B N, latus M I, debere minus eſſe latere M N, ſic oſtenditur.

Ad punctum B, intelligatur factus angulus M B P, æqualis angulo M B N; & recta MI, protracta ſit in P. Quoniam ergo in duobus triangulis P M B, N M B, duo anguli PMB, P B M, æquales ſunt duobus N M B, N B M, vterque vtrique, & adiacent æqualibus lateribus, imo vni communi M B; ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia erunt; ob id latus M P, æquabitur lateri M N; ſed M I, minus eſt latere M P; ergo M I, minus erit latere M N.

COM-

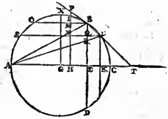
COMPOSITIO.

Quoniam igitur HM, ad HN, maiorem habet rationem, quam HI, ad HM, ergo B E, ad HN, maiorem habebit rationem, quam HI, ad HM: ſed vt EB, ad HN, ita A E, ad AH, ergo AE, ad AH, maiorem habebit rationem, quàm HI, ad HM, ſeu ad E B, quare rectangulum ſub AE, & EB, maius erit rectangulo ſub AH, & HI. Quod oportebat oſtendere.

Non diſſimiliter procedendum, cum punctum I, fuerit in apice quadrantis; at ſi fuerit inter quadrantis apicem vt punctum O, vel inter A, & O, &c. manifeſtum eſt rectangulum ſemper eſſe minus, quàm quod ſub AG, & ſub perpendiculari ex G, ad quadrantis apicem; ergo multò magis minus erit rectangulo ſub AE, & EB.

Quod ſi punctum I, caderet inter B, C, vt in L, ſic procedendum.

RESOLVTIO.



Quoniam igitur rectangulum ſub AE, & EB, maius eſt rectangulo ſub AK, & KL, ſeu rectangulum ſub AK, & KL, minus eſt rectangulo ſub AE, & EB; ergo BE, ad KL, maiorem habebit [a] rationem, quàm AK, ad AE; Quod ita ſe habet; Nam intelligatur producta BL, ad partes L, ita vt occurrat diametro productæ in T. Quoniam igitur arcus AD, eſt triens circumferentiæ, erit æqualis arcui DCB, ſed DCB, eſt maior arcu DCL, ergo arcus A D, maior erit arcu DCL, ergo angulus ABD, maior erit angulo DBL, hoc eſt angulus ABE, maior erit angulo EBT; eſt autem angulus AEB, æqualis angulo TEB; vterque enim eſt rectus; latus verò EB, commune eſt vtrique triangulo; ergo baſis AE, maior erit baſe ET; vt mox conſtabit; ergo AE, multo maior erit, quam KT, ergo EK, ad KT, maiorem habebit rationem, quàm ad AE; ergo componendo ET ad KT, ſeu EB, ad KL, maiorem habebit rationem, quàm AK, ad AE; Quod oportebat, &c.

[a] 16. ſept. Pap.

COMPOSITIO.

Quoniam igitur maior eſt proportio rectæ EB, ad rectam KL, quàm AK, ad AE, ergo rectangulum ſub EB, & AE, maius erit rectangulo ſub AK, & KL.

Vel quia EB, ad KL, maiorem habet rationem, quam AK, ad AE; ergo AE, ad AK, maiorem habebit [a] rationem, quam KL, ad EB; quare rectangulum ſub AE, & EB, maius erit rectangulo ſub AK, & KL. Quod erat operæ pretium oſtendere.

[a] 16. quinti.

Quod ſi rectangulum ſub AE, EB, eſt maximum, etiam eius duplum, nempè ſub AE, BD, maximum erit.

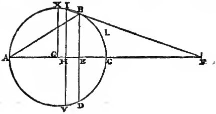
Idem tamen paulò aliter, ſi præmiſſum ſit, quod etiam ſupra adhibitum eſt.

LEMMA.

Si duo triangula habuerint latus lateri æquale, alter autem adiacentium angulorum in vno, ſit æqualis alteri adiacentium in altero, reliquus adiacentium in primo, ſit maior reliquo adiacentium in ſecundo, etiam latus maiori angulo oppoſitum, maius erit latere quod minori angulo opponitur.

Sed id elementare eſt. Hoc præmiſſo.

Intelligatur ducta I B, quæ ad partes B, protracta occurrat diametro productæ (occurret autem vt patet ex Elementis) ad partes C, nempè in F; & protrahatur I H, ad V.



RESOLVTIO.

a 16:7 Pappi. Quoniam igitur rectangulum ſub A E, & E B., maius eſt rectangulo ſub A H, H I, ergo
b 29. quinti. A E, ad A H, maiorem habebit [a] rationem quàm H I, ad E B, ſed vt H I, ad E B, ita HF, ad E F, ergo A E, ad A H, maiorem habebit rationem quàm H F, ad E F, ergo [b] diuidendo HE, ad A H, maiorem habebit rationem, quàm H E, ad E F; vnde E F, maior erit, quàm AH. Quod ità ſe habet, angulus enim A B D, inſiſtit arcui A D, trienti totius peripheriæ at verò angulus V I B, inſiſtit arcui V D B, qui maior eſt triente, vtpote maior arcu D C B, eſt igitur angulus A B D, ſeu A B E, minor angulo V I B, ſeu D B F, ſeu E B F. In duobus igitur triangulis A B E, E B F, latus E B, vtrique triangulo commune eſt; angulus autem A E B, æqualis eſt angulp F E B, vterque enim eſt rectus; angulus verò E B F, maior eſt angulo E B A, ergo ex eo, quod præmiſimus Lemmate; latus E F, maius erit latere AE, ergo multo maius recta AH.

COMPOSITIO.

c 18. quinti. Quoniam igitur E F, maior eſt, quàm A H, recta H E, ad A H, maiorem habebit ratio-
d 16. 7. Pappi nem, quàm ad EF; quarè [c] componendo AE, ad A H, maiorem habebit rationem quàm H F. ad E F; hoc eſt H I, ad E B. Proinde rectangulum ſub AE, & EB, maius erit [d] rectangulo ſub A H, & H I.

Hæc autem, cum punctum I, ceciderit inter B, X; vel in ipſo puncto X, quadrantis apice. At verò ſi cadat in quadrante A X, inter A, X, manifeſtum eſt, vt ſuperiùs in alia reſolutione oſtendimus, rectangulum factum à recta cadente ex a ſſumpto puncto perpendiculari ad diametrum, in ſegmentum diametri inter A, & punctum, vbi cadit perpendicularis, minus eſſe rectangulo ſub A E, E B.

Quod ſi punctum I, cadat inter B, C, vt in L, non diſimili diſcurſu, ac ſupra concludetur rectangulum ſub A E, E B, maius eſſe quocunque ex rectangulis factis, à perpendiculari, ex puncto aſſumpto in arcu ſextante B C, in diametrum, in diametri ſegmentum, inter A, & punctum, vbi perpendicularis cadit, &c.

Punctum ſit e. g. L, ex L, eadat perpendicularis in diametrum, & ex B, per L, intelligatur ducta recta occurrẽs diametro productæ, & procedatur non abſimili modo ac prius.

PROPOSITIO XIII.

Reperire maximum rectangulum, comprehenſum ſub media, & maiori extrema trium proportionalium.

Sic



Sit A B, ſupra quam deſcriptus ſit ſemicirculus A E B, at vero A B, ſecta ſit in D, itaut ex D, erecta ſit perpendicularis D E, erunt quidem A D, D E, D B, tres proportionales; quarum media D E.

Supponamus autem rectangulum A D E, eſſe maximum, nempe contentum ſub maiori extrema AD, & media D E.

Sit A B, æqualis b, & A D, æqualis a, ergo D B, erit $b - a$ rectangulum ſub his eſt $b\,a - a^2$, quare $b\,a - a^2$, erit quadratū ex DE, itaq; ipſa DE, erit ℞ $(b\,a - a^2)$ ducatur autē a, nempe A D, in ℞ $(b\,a - a^2)$ ſcilicet D E, & proueniet ℞ $(b\,a^3 - a^4)$ tantum igitur erit rectangulum ſub A D, & D E.

Nunc ſupponendum A D, eſſe $a + e$, itaque D B, erit $b - a - e$, rectangulum ſub his eſt $b\,a + b\,e - a^2 - 2\,a\,e - e^2$, itaque eius latus, puta ℞ $(b\,a + b\,e - a^2 - 2\,a\,e - e^2)$ æquabitur D E, ſi igitur ℞ $(b\,a + b\,e - a^2 - 2\,a\,e - e^2)$ ducatur in $a + e$ proueniet id quod æquabitur ℞ $(b\,a^3 - a^4)$ id verò, quod prouenit eſt ℞ $(b\,a^3 + 3\,b\,a^2\,e + 3\,b\,a\,e^2 + b\,e^3 - 4\,a^3\,e - 6\,a^2\,e^2 - 4\,a\,e^3 - a^4 - e^4)$ Itaque $b\,a^3 + 3\,b\,a^2\,e + 3\,b\,a\,e^2 + b\,e^3 - 4\,a^3\,e - 6\,a^2\,e^2 - 4\,a\,e^3 - a^4 - e^4$, eſt quod æquabitur $b\,a^3 - a^4$, & per antitheſin, aliaq; præcepta adhibita in ſuperiori Problemate, peruenietur ad hanc æquationem $a = \frac{3}{4}\,b$. Hinc.

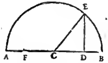
P O R I S M A.

Maior extrema è tribus proportionalibus, debet eſſe æqualis tribus quartis partibus aggregati extremarum, ſi rectangulum ſub maiori extrema & media, debet eſſe maximum.

Cæterum ridiculum foret inquirere maximum rectangulum ſub media, & minori extrema, è tribus proportionalibus; dum enim creſcit minor extrema, creſcit & media, quo ad fiant tres rectæ æquales, vnde nequit aſſignari rectangulum ſub minori extrema, & media, ita vt illud maximum ſit omnium, quod cuique perſpectum, ac manifeſtum eſſe, poteſt.

PROPOSITIO XIV.

Reperire maximum rectangulum comprehenſum, ſub media, & differentia extremarum trium proportionalium.



Supponamus ſuper A B, deſcriptum eſſe ſemicirculum A E B. Sit autem C, centrum, atque ſegmentum C D, æquale ſit ſegmento C F; ſegmentorum verò A D, D B, differentia eſt F D, at ſi ex D, erecta fuerit perpendicularis D E, erit ipſa D E, media proportionalis inter A D, D B.

Supponamus rectangulum F D E, eſſe maximum; Quæritur punctum D, ſeu quam relationem habeat AD, ad DB, vel FD, ad D B, &c. Sit b, æqualis AC, vel C B, at vero a, ſit æqualis C D, vel FC, igitur $b + a$ æquabitur AD, & $b - a$, æquabitur DB, & $2\,a$, æquabitur F D. Cum igitur AD, æquetur $b + a$, & DB, æquetur $b - a$, igitur ducatur $b + a$ in $b - a$, vt fiat $b^2 - a^2$, differentia enim laterum ducta in eorundem aggregatum facit differentiam quadratorum, itaque quadratum ex DE, erit $b^2 - a^2$, quare DE, æquabitur ℞ $(b^2 - a^2)$ & quia F D, erat $2\,a$, ducatur $2\,a$ in ℞ $(b^2 - a^2)$ & proueniet $2\,a$ ℞ $(b^2 - a^2)$ ſeu ℞ $(4\,b^2\,a^2 - 4\,a^4)$ ſeu quod idem eſt 4, ℞, $b^2 - a^2$, vtamur autem modo ℞ $(4\,b^2\,a^2 - a^4)$.

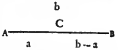
Supponamus nunc e, æquari o. Itaque $a + e$, æquabitur C D, vel CF, proinde $b + a + e$, æquabitur AD, & $b - a - e$, æquabitur DB, inſuper $2\,a + 2\,e$, æquabitur FD, rectangulum igitur AD B, eſt $b^2 - a^2 - 2\,a\,e - e^2$, & E D, erit ℞ $(b^2 - a^2 - 2\,a\,e - e^2)$ rectangulum verò ſub FD, & ED, erit $4\,b^2\,a^2 - 4\,a^4 + 8\,b^2\,a\,e + 4\,b^2\,e^2 - 16\,a^3\,e - 24\,a^2\,e^2 - 16\,a\,e^3 - 4\,e^4$, quod æquabitur $4\,b^2\,a^2 - 4\,a^4$, & per antitheſin fiet $8\,b^2\,a\,e + 4\,b^2\,e^2 = 16\,a^3\,e + 24\,a^2\,e^2 + 16\,a\,e^3 - 4\,e^4$, & per hypobibaſmū $8\,b^2\,a + 4\,b^2\,e = 16\,a^3 + 24\,a^2\,e + 16\,a\,e^2 - 4\,e^3$. Aboletis membris in quibus adeſt nota e, ſeruatiſque cæteris, fiet æquatio $8\,b^2\,a = 16\,a^3$ & facto paraboliſmo omnibus nempe applicatis ad 8, proueniet æquatio $b^2\,a = 2\,a^3$, & per hypobibaſmum fiet $b^2 = 2\,a^2$, ergo quod idem eſt $2\,a^2 = b^2$, & per paraboliſmum fiet $a^2 = \frac{1}{2}\,b^2$, quamobrem a, æquabitur ℞ $\frac{1}{2}\,b^2$. Hinc.

PORISMA.

Dimidium differentiæ extremarum, æquatur ei, quod poteſt dimidium quadrati ex dimidio aggregati earundem extremarum; quando rectangulum ſub media, & differentia extremarum eſt omnium maximum, &c.

PROPOSITIO XV.

Datum latus diuidere in duo ſegmenta, vt ex ijs quadratorum aggregatum, ſit omnium minimum.



Datum ſit latus A B, & oporteat facere quod imperatum eſt. Latus propoſitum ſupponatur b, ſint autem ſegmenta A C, CB, ita vt quadratorum aggregatum ex ipſis, ſit omnium minimum. Oporteat reperire punctum C; ſegmentum AC, eſto a, ergo ſegmentum B C, erit $b - a$; quadratum autem ipſius a, eſt a^2, & quadratum ex $b - a$ eſt $b^2 - 2ba + a^2$, quadratorum aggregatum eſt $b^2 - 2ba + 2a^2$, hoc autem ſeruandum eſt, vtpotè illud, cum quo inſtituenda eſt comparatio.

Supponamus e, æquari o; atque A C, eſſe $a + e$; at vero G B, eſſe $b - a - e$, harum partium quadrata ſunt ipſius quidem $a + e$, eſt $a^2 + 2ae + e^2$, & ipſius $b - a - e$, eſt $b^2 - 2ba - 2be + a^2 + 2ae + e^2$; aggregatum horum eſt $b^2 - 2ba - 2be + 2a^2 + 4ae + 2e^2$; quamobrem erit æquatio $b^2 - 2ba - 2be + 2a^2 + 4ae + 2e^2 = b^2 - 2ba + 2a^2$; & per antitheſin $4ae + 2e^2 = 2be$, omnibuſque applicatis ad e, fiet $4a + 2e = 2b$; quo circa erit $4a = 2b$; atque adeò 2 a, æquabuntur b. Hinc.

PORISMA.

Latus diuidendum eſt dimidium partis quæſita quocirca, ſi latus bifariam diuidatur, aggregatum quadratorum ex ipſis partibus, eſt omnium minimum.

COROLLARIUM.

Ex his facile intelligis, minimum aggregatum quadratorum à partibus lineæ diuiſæ, duplum eſſe maximi rectanguli, ſub partibus einſdem lineæ.

Oſtenſum eſt enim ſupra rectangulum maximum ſub ſegmentis dati lateris, illud eſſe, quod ſub æqualibus lateribus continetur, atque adeò eſt quadratum à dimidio datæ lateris, at vero nunc conſtat minimum aggregatum quadratorum à ſegmentis dati lateris illud eſſe, quod conſtat à quadratis partium, ſeu partium quarum vtraque eſt dimidium totius lateris diuidendi; hoc autem aggregatum eſt duplum quadrati à dimidio, ſeu rectanguli maximi, ergo minimum quadratorum aggregatum eſt duplum rectanguli maximi, &c.

Extat iam in Conicis demonſtratum.

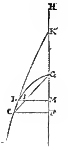
PROPOSITIO XVI.

Si parabolen recta linea contingat conueniens cum diametro extra ſectionem, quæ à tactu ad diametrum ordinatim applicatur abſcindet ex diametro ad verticem ſectionis lineam æqualem ei, quæ inter ipſam, & contingentem interyeitur; & in locum qui eſt inter contingentem, & ſectionem alia recta linea non cadet.

In autem ſic aſſequemur.

Data ſit ſemiparabola C G, cuius diameter ſit F G, vt in perimetro ſeu linea parabolica C G, datum ſit punctum C, ſit autem recta C L K, recta, quæ tangat parabolen in C, puncto; recta verò F G, ſit protracta ad partes G. Propoſitum ſit inquirere punctum K, vbi tangens occurrit productæ diametro in K. Oportet igitur inquirere G K, relatam ad G F, quam ſcilicet rationem habeat.

Ducta



Ducta ſit C F, ordinatim ad diametrum F G, quæ data erit, ſumaturque punctum L, in C k, arbitrarium, agaturque LIM, parallela ipſi C F, manifeſtum eſt LM, maiorem eſſe, quàm IM, Triangulum CFk, ſimile eſt triangulo LMK, eſt autem I, punctum, interſectio lineæ L M, cum linea parabolica C I G, erit igitur ob paraboles naturam, vt F G,ad M G,ita quadratum CF, ad quadratum IM, ſed quadratum CF, ad quadratum IM,maiorem habet rationem,quàm quadratum CF,ad quadratum LM,& quadratum CF,ad quad.LM,eſt ob ſimilitudinem triangulorum, vt quadratum F K, ad quadratum M K, ergo FG, ad MG, maiorem habet rationem, quàm quadratum FK, ad quadratum M K. His præhabit s.

Supponamus F G, eſſe b, at F K, eſto a. Supponamus deinde e, æquari FM, ſeu o; erit quidem MG, idem quod $b - e$, & Mk, erit $a - e$; vt autem F G, ad M G, ita quadratum F K, ad quadratum MK, proinde vt b ad $b - e$, ita a^2 ad $a^2 - 2ae + e^2$, ergo $ba^2 - 2bae + be^2$ æquabitur $ba^2 - ea^2$, & per antitheſin fiet $be^2 + ea^2 = 2bae$ inſtituto paraboliſmo, fiet æquatio $be + a^2 = 2ba$; eſt autem be, idem quod o; ob id fiet æquatio $a^2 = 2ba$, & per hypobibaſmum erit $a = 2b$. Itaque F K, quæ ponebatur a, æquatur duplę F G, quæ ponebatur b, vnde FG, GK, ſunt inter ſe æquales; quod contendit Apollonius propoſitione ſupra citata. Hinc.

PORISMA.

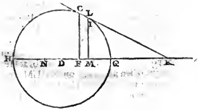
In omni parabola recta linea contingens conueniens cum diametro extra ſectionem, quæ à tactu ad diametrum ordinatim applicatur, abſcindet ex diametro ad verticem ſectionis lineam æqualem ei, quæ inter ipſam, & contingentem interijcitur & in locum, qui eſt inter contingentem & ſectionem, alia recta linea non cadet.

Demonſtratio eſt in Conicis Elementis.

PROPOSITIO XVII.

Si hyperbolen, vel ellipſim, vel circuli circumferentiam contingat quædam recta linea conueniens cum tranſuerſo figuræ latere, & à tactu recta linea ad diametrum ordinatim applicetur erit vt linea quæ interijcitur inter contingentem, & terminum tráſuerſi lateris ad interiectam inter eandem, & alterum lateris terminum, ita linea quæ eſt inter ordinatim applicatam, & terminum lateris ad eam quæ eſt inter eandem, & alterum terminum; adeò vt continuatæ inter ſe ſint, quæ ſibi ipſis reſpondent: & in locum, qui inter contingentem, & ſectionem interijcitur altera recta linea non cadet.

Methodo autem ſuperiori hunc in modum colligere licebit relationem rectæ Fk, ad alias quantitates.



Supponamus H G, eſſe rectam ſupra quam centro D, deſcriptus ſit ſemicirculus H C G, itaut diameter ſit H G. Sit autem C, punctum in peripheria vbi recta C K, tangit circulum ipſum, occurrens diametro protractæ in K. Quod autem quæritur eſt punctum k. Ducta ſit CF, ordinatim ad diametrum, at verò in recta Ck, ſit aſſumptum pro arbitrio punctum L, ſitque ducta linea LIM, parallela ipſi CF; eſt autem LM, maior, quàm IM, triangulum verò C F K, ſimile eſt triangulo L M k; ſunt enim æquiangula. At verò, vt oſtendit Apollonius in Conicis Elementis vt eſt rectangulum H F G, ad rectangulum H M G, ita quadratum CF, ad quadratum IM, at verò quadratum C F, ad quadratum IM, maiorem habet rationem, quàm quadratum C F, ad quadratum LM, & vt quadratum CF, ad quadratum LM, ita eſt quadratum FK, ad qua-

quadratum M K, ergo rectangulum H F G, ad rectangulum H M G, maiorem habebit rationem, quàm quadratum F K, ad quadratum M K.

Supponamus b æquari F G, & d, æquari H F; at verò a æquari F k; ſed e, æquari F M, Eſt enim EM æqualis o, & o, ſeu nihilo; erit igitur H M, idem quod d † e, at M G, erit b -- e; ſed M K, erit a -- e, quare vt rectangulum H F G, ad rectangulum H M G, ita quadratum F k, ad quadratum M K, itaque vt b d, ad -- e d -- e^2 † b d † b e, ita a^2, ad a^2 -- 2 a e † e^2, proinde fiet æqnatio b d a^2 -- 2 a e b d ✠ e^2 b d = -- e d a^2 -- $e^2 a^2$ † b d a^2 † b e a^2; & per antitheſin fiet -- 2 a e b d ✠ e^2 b d = -- e d a^2 -- $e^2 a^2$ ✠ b e a^2, & per hypobibaſmum -- 2 a b d † e b d = -- d a^2 -- e a^2 † b a^2 eſt autem e, æqualis o, ſeu nihilo, ex hypotheſi, quare -- 2 a b d = -- d a^2 ✠ b a^2, & per hypobibaſmum fiet -- 2 b d = † b a -- d a, & per antitheſin d a -- b a = 2 b d quare per paraboliſmum fiet a = $\frac{2bd}{d-b}$. Itaque F k, erit $\frac{2bd}{d-b}$, nempe quantitas ortiua ex applicatione dupli rectanguli b d, ad differentiam inter d & b, hoc eſt dupli rectanguli H F G, ad differentiam inter H F, & F G. Itaque erit, vt d -- b, ad ℞ 2 b d, ita hoc ad a, ſeu vt d -- b, ad d ita 2 b, ad a. Hinc.

PORISMA.

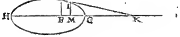
In omni Circulo, vt eſt differentia ſegmentorum diametri ad ſegmentum maius, ita duplum ſegmentum minus, ad interceptam inter ordinatim ductam à qua diametri ſegmenta ipſa deſignantur, & punctum occurrens, ipſius tangentis, cum diametro protracta.

In omni igitur circulo tangens occurrens diametro protractæ, ita ſe habet, vt ſi ſecetur F N, æqualis F G, erit H N, exceſſus quo H F, ſuperat F G, atque ut H N, ad H F, ita N G ad F K.

PROPOSITIO XVIII.

Ad ellipſim quod attinet, non diſſimili argumentatione procedendum,

Data ſit ellipſis circa diametrum H G, ſit autem in H C G, punctum C, in quo recta CLK, tangit ellipſim occurrens diametro protractæ in K. Quæſitum eſt punctum K, in quo HG K, cum C K, ſe mutuò interſecant.



Ducta ſit CF, ordinatim ad diametrum, at in CK, intelligatur acceptum quoduis punctum L, ductaque ſit LIM parallela ipſi CF; eſt autem LM, maior ipſa I M; totum enim eſt ſua parte maius; quoniam vero L M, parallela eſt rectæ C F, erit triangulum CFK, ſimile triangulo LM K; eſt autem ex ijs quæ demonſtrat Apollonius vt rectangulum HFG, ad rectangulum HM G, ita quadratum C F, ad quadratum IM; at quadratum C F, ad quadratum IM; maiorem habet rationem, quàm quadratum CF, ad quadratum LM, vt verò quadratum CF, ad quadratum LM, ita quadratum F K, ad quadratum M K; propterea rectangulum H F G, ad rectangulum HMG, maiorem habebit rationem, quàm quadr. FK, ad quadr. M K.

Supponendum eſt autem FG, eſſe b, at HF, eſſe d; item FK, eſſe a. Sit autem e, æqualis FM, atque o, ſeu nihilo; erit quidem HM, æqualis d † e, & MG, erit b -- e, vt MK, erit a -- e, quare rectangulum H F G, ad rectangulum HMG, vt quadratum FK, ad quadra- Eſt enim FM æqualis o. tum M K, proinde, vt b d ad -- e d -- e^2 † b d † b e, ita a^2, ad a^2 -- 2 a e † e^2; atque adeò b d e a^2 - 2 a e b d † e^2 b d, æquab. - e d a^2 - $e^2 a^2$ † b d a^2 † b e a^2, &c. & per hypobibaſmũ, fiet -- 2 a b d † e b d = -- d a^2 -- e a^2 † b a^2; cumque e, æquetur o, ſeu nihilo erit -- 2 a b d = -- d a^2 † b a^2, & per hypobibaſmum, fiet -- 2 b d = † b a -- d a, & per antitheſin, fiet d a -- b a = 2 b d; Inſtituto paraboliſmo fiet a = $\frac{2bd}{d-b}$. Igitur fiet analogiſmus, vt in circulo dictum fuit, vt d -- b, ad d, ita 2 b, ad a. Itaque.

PORISMA.

In omni ellipſi, vt eſt differentia ſegmentorum diametri, ad ſegmentum maius, ita duplum ſegmentum minus, ad interceptam inter ordinatim ductam, à qua ſegmenta ipſa deſignantur, & punctum occurſus ipſius tangentis cum diametro protracta.

Sequitur de Hyperbole; ſed de hoc alibi.

Mihi autem hactenus allata meditanti, fama retulit præclariſſimum Michael Angelum Riccium, omnigena virtute cumulatiſſimum, ætatiſque noſtræ ſplendorem, ac decus, Romæ, vt cætera, ita hæc ſumma cum laude tractaſſe, proprioque marte in his, quampluri- *Michael Angeli Riccii laudes.* ma reperijſſe, adeò quidem eximia, vt nihil ſupra; quamobrem animum ſtatim ad eum inuiſendum appuli, ratus, ſi eum alloquerer, multa, & quidem ſublimia, non dum alijs perſpecta me cognoſciturum; Romam propterea feſtinans petij, ac eum adiens, plenum humanitatis æquè, ac doctrinæ cognoui; poſt multa denique protuli, *Auxit præſentia famam*; tanta ſiquidem eſt qua pollet ingenij uis, atque ſolertia, vt ad veritatis indagationem, Naturæ non incolſultò diceres illum Interpretem. Cùm autem & de rebus Phyſicis, & Mathematicis, plura iuter loquendum attuliſſet in medium, denique Lucubrationes præſtantiſſimas aperuit, ac inter cætera generalem rationem Effectionum Geometricarum, pro quocunque Problematum genere, vnà cum eorumdem Problematum determinandi ratione. Hæc cum eruditiſſimis uiris Anglis viſa ſint digna prælo, propterea annis proximè antea ctis Typis commiſſa ſunt, quorum imitatione, ad communem vtilitatem, hic tanti Ingenij nobiliſſimum fœtum ſubijciam; vnde, vt ex vngue Leonem, eius perſpicacitatem, ac eruditionem ſummam addiſces.

DEFINITIONES.

1 Poteſtatem quamlibet, eiuſque radicem, voco dignitatem.

2 Si Dignitas in Dignitatem ducatur, vt A 2, in B 3, fiet productũ A 2 in B 3; cui producto illud ſimile dicimus, quod gignitur ex dignitatibus graduum eorumdem. Ita, in facta hypotheſi, productum E 2 in C 3, ex quadrato & cubo, ſimile eſt producto A 2 in B 3.

3 Homogenea producta ſunt, quæ ad eundem gradum pertinent; vt duo rectangula, quippè quæ ad ſecundum gradum pertinent; & duo ſolida, quæ ad tertium.

4 Terminos cum dico, intelligi volo duos numeros, ſeu æquales, ſeu inæquales, vel numerum & vnitatem, vel duas vnitates. Terminos inæquales appello duos inæquales, vel numerum, & vnitatem. Terminos autem æquales, duos æquales numeros, vel duas vnitates.

5 Productum in linea fieri ſecundum terminos datos, aut poſitos, dicimus, quum illud fit ex duabus dignitatibus, quarum exponentes ſunt ipſi termini dati, vel poſiti; radices verò ſegmenta illius rectæ lineæ ſectæ in proportione terminorum eorumdem.

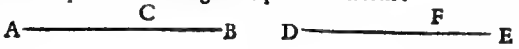
Sit verbi cauſa, quæpiam recta linea, cuius maius ſegmentum ad minus ſit in ratione 3 ad 2; productum ex cubo ſegmenti maioris in quadratum minoris erit factum in linea data ſecundum terminos poſitos 3, & 2; quia ſegmenta quæ ſunt dignitatum radices habent rationem numeri 3 ad 2, & exponentes earumdem dignitatum ſunt etiam 3, & 2.

Rurſus eſto quemadmodum ſegmentum maius ad minus eiuſdem lineæ, ſic 3 ad 1, productum ex cubo maioris ſegmenti in ſegmentum ipſum minus, erit productum in linea factum ſecundum terminos poſitos, numerum & vnitatem. Ita, A 3 in B 1 [ſi A vocetur maius ſegmentum, B verò, minus] eſt productum factum in linea A † B ſecundum terminos 3, & vnitatem, quia radices A & B ſic ſunt, vt eſt numerus 3 ad vnitatem; & dignitatis A 3 exponens eſt, 3, numerus datus; dignitatis B 1 exponens eſt, vnitas, item data.

Lemma primum.

Si duæ rectæ in eadem ratione ſecentur, producta ſimilia facta ex ſegmentis, tanquàm ex radicibus, erunt proportionalia productis homogeneis, quæ fient ex totis.

Sint A B, D E, rectæ, in punctis C, & F, ita ſe-



ctæ, vt

Digitized by Google

ctæ, vt quam rationem A C ad C B habet, eandem habeat D F ad F E, & fiant ex illarum ſegmentis producta A C 2 in C B 3, & D F 2 in F E 3, quæ ſunt ſimilia per ſecundam definitionem; ijſque homogenea producta fiant ex totis A B, D E, nimirum A B 5, D E 5, per tertiam definitionem. Dico A C 2 in C B 3 eandem rationem habere ad A B 5, ac D F 2 in FE 3 ad DE 5. Quia rationes ex quibus ratio producti AC 2 in CB 3 ad AB 5 componitur, eædem ſunt ae componentes rationem producti DF 2 in FE 3 ad DE 5; ob ſectionem linearum proportionalem, & inde proportionales dignitates ex quibus producta illa reſultant. Quod, &c.

Lemma ſecundum.

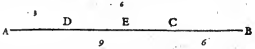
Ijſdem poſitis, Dico, ſi AC 2 in CB 3 fuerit maximum omnium ſimilium productorum ex binis ſegmentis rectæ A B, etiam D F 2 in F E 3 fore maximum productorum ſimilium ex binis ſegmentis rectæ DE, tanquam ex radicibus.

Singulis enim productis ex ſegmentis rectæ DE alia reſpondent orta ex ſegmentis rectę AB in eadem proportione ſectæ; & illa ad homogeneum ſuum DE 5 eandem rationem habent, atque iſta ad ſuum AB 5, ex primo Lemmate. Ratio quidem AC 2 in C B 3 ad AB 5, ex hypotheſi, eſt eadem, ac ratio DF 2 in FE 3 ad DE 5: cæterorum verò productorum ex ſegmentis ipſius DE ad DE 5, eadem eſt atque ratio productorum ſibi reſpondentium, quæ fiunt ex ſegmentis rectæ AB, ad AB 5. Cùm igitur ratio AC 2 in CB 3 [quod maximum eſſe ponitur] ad AB 5 ſit maior, per Octauam quinti Element. ratione cæterorum productorum ſibi ſimilium ad AB 5; maior etiam erit ratio DF 2 in FE 3 ad DE 5, quàm ratio cæterorum ſimilium productorum ex ſegmentis rectæ D E ad D E 5; ae proinde ipſum D F 2 in FE 3 per decimam quinti Elem. eſt maximum. Quod, &c.

Lemma tertium.

Si data recta linea ſecetur in ratione terminorum inæqualium, & diuidendo, fiat ſegmẽtorum differentia ad minus ſegmentum, vt differentia terminorum ad minorem terminum; hæc inuenta proportionalitas, vel ipſa erit proportionalitatis æqualitatis, vel alia, in quam incidemus, iterum diuidendo, & ſic deinceps; & in eâ terminorum differentia æquabitur minori termino, & differentia ſegmentorum ſegmento minori.

Eſto AC ad CB, vt 9 ad 6, & A D differentia ſegmentorum AC, CB: erit diuidendo, 3 ad 6, vt A D, ad C B, vel ad ſegmentum



ſibi æquale, D C: Quoniam verò hæc proportio non eſt proportio æqualitatis, fiat D E differentia ſegmentorum AD, & DC; 3, differentia numerorum 6 & 3; & diuidendo, erit, vt 3 ad 3, ſic DE ad AD, proportio æqualitatis.

Rurſus A C ſit ad C B, vt 5 ad 3; & AD ſegmentorum differentia; diuidendo erit, AD ad CB, ſeu ad ſibi æquale ſegmentum DC, vt 2 ad 3. Et iterum diuidendo [ſegmentorum A D & D C, eſto, differentia, E



C,] 1 ad 2 vt EC ad AD ſeu DE; & tertiò [facta FE terminorum D E & E C differentia] diuidendo inueniemus, vt 1 ad 1, ita F E ad E C. Quod, &c.

Ratio Lemmatis eſt, quod duorum quorumcumque numerorum differentia, vel differentia numeri & vnitatis, ſemper eſt numerus aut vnitas, vt per ſe patet: & nos diuidendo, ſemel atque iterum, ae ſæpius, demimus ſemper minorem terminum diuiſæ proportionalitatis qui eſt numerus vel unitas, de maiori termino ſeu numero, vtimurquè deinceps reſiduo tantùm [quod eſt eorum terminorum differentia] & comparamus illud cum minori termino proportionalitatis diuiſæ: at non poſſumus ſic demendo progredi in infinitum, quia vnitates in terminis ſunt finitæ, ſed exhauritur tandem omnis differentia, reſiduumq; maioris termini proportionalitatis diuiſæ æquatur termino minori. Ita fit proportio æqualitatis, in qua vnitas ad vnitatem, vel numerus ad ſibi æqualem numerum, eſt vt ſeg-

mentum

mentum ad aliud æquale ſegmentum. Quod oſtendere oportebat.

Quod ſi ab ea proportione æqualitatis, in qua deſitum eſt, rurſus incipiamus, Dico nos componendo gradatim, venturos per veſtigia diuiſionis ad terminos primæ proportionalitatis, in qua ſegmenta datæ lineæ erant in ratione inæqualium terminorum. Cuius propoſitionis rationem facilè intelliget Geometra, quem latere non poteſt, in Geometria omnia quæ diuidendo concluduntur, ex contrario conuerti poſſe, & componendo concludi illud ipſum, quod ponebatur ante diuiſionem, vt in quinto Elem. oſtenditur. Exempli gratia, ſit maius ſegmentum datæ rectæ ad minus, vt 2 ad 1. Igitur diuidendo 1 ad 1, eſt vt differentia ſegmentorum ad minus ſegmentum. Ex hac porrò æqualitatis proportione componendo redimus ad primam proportionem, in qua ſegmenta erant in ratione 2 ad 1. Quod, &c.

Lemma quartum.

Si duo quælibet producta orta ſint ex duabus dignitatibus ductis in aliam communem dignitatem; quam rationem habent illæ duæ dignitates inter ſe, eandem habent duo producta. Sic productum A B 3 in B C 5 eam rationem habet ad productum A B 3 in E F 5, quam habet dignitas BC 5 ad dignitatem EF 5; in quas duas dignitates ducta communis dignitas AB 3 illa producta efficit.

Ex definitione multiplicationis probatur hoc Lemma, quod alij in numeris demonſtrarunt.

Lemma quintum.

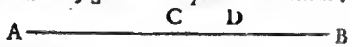
Datis quatuor quãtitatibus, quarũ prima ad ſecundã habeat minorẽ rationẽ, quàm tertia ad quartam, productum quod gignitur ex duabus extremis eſt minus producto ex medijs.

Augeatur prima donec fiant quatuor Geometricè proportionales; tunc prima in quartam ducta efficiet productum æquale producto ex medijs. Igitur productum quod efficiebat ante quàm augeretur, erat productum minus eodem producto ex quantitatibus medijs. Quod, &c.

THEOREMA I.

Productũ in aliqua recta linea factũ ſecundũ poſitos terminos æquales, maximum eſt omniũ ſimilium productorum, quæ fieri poſſunt ex binis lineæ datæ ſegmentis tanquam ex radicibus.

Recta linea AB ſecetur æqualiter in puncto C, & ſit AC ad CB vt 3 ad 3 [termini æquales poſiti] Dico productum AC 3 in C B 3, quod fit in linea A B ſecundum poſitos terminos, eſſe omnium ſimilium productorum maximum. Sumpto quolibet alio puncto D, faciamus aliud ſimile productum A D 3, in D B 3. Cum autem ſint quatuor lineæ Arithmeticè proportionales cum exceſſu C D, nimirum AD, AC, CB, & BD, minor eſt ratio maximæ AD, ad AC, quàm CB ad BD; & triplicata ratio ipſius A D ad A C [ſeu ratio A D 3 ad AC 3] minor eſt, quam triplicata ipſius CB ad BD [ſeu CB 3 ad BD 3] & per quintum Lemma, productũ ex medijs quantitatibus, AC 3, in CB 3, maius eſt producto AD 3 in BD 3 facto ex duabus extremis. Eodem pacto demonſtratur AC 3 in CB 3 eſſe alio quocumque ſimili producto maius, & conſequenter omnium ſimilium maximum. Quod, &c.

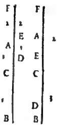


THEOREMA II.

Si duo rectæ lineæ ſegmenta fuerint in ratione terminorum inæqualium, & per conſequens, diuidendo ſit, differentia ſegmentorum ad minus ſegmentum, vt differentia terminorum ad minorem terminum; quoties ex dignitate differentiæ ſegmentorum ducta in dignitatem minoris ſegmenti fit productum maximum, toties fit etiam maximum ex eadem dignitate minoris ſegmenti ducta in dignitatem maioris; atque ita, ſi dignitates ſegmentorum pro exponentibus habeant terminos poſitos, & dignitas differentiæ, differentiam terminorum.

Sit AB recta linea inæqualiter ſecta in puncto C, & BC ad AC, vt 5 ad 3, qui ſint termini poſiti. Producatur BA in F, donec æquetur F C ipſi CB, & AF erit differentia ſegmentorum BC & AC. Quoniam verò ſegmentum maius B C ſic eſt ad minus C A, vt 5 eſt ad 3, erit diuidendo AF ad CA, vt eſt 2 ad 3. Nunc fiant duo producta qualia diximus,

Digitized by Google



primum FA 2 in AC 3, ex dignitate ipſius FA, differentiæ ſegmentorum, ducta in dignitatem minoris ſegmenti A C. Secundum A C 3 in C B 5, ortum ex eadem dignitate minoris ſegmenti ducta in dignitatem maioris. Prima dignitas F A 2 habet pro exponente, 2, differentiam datorum terminorum, reliquæ habent 3 & 5, terminos poſitos, vt imperabatur. Dico, ſi productum primum eſt maximum omnium ſimilium ex binis ſegmentis rectæ FC [eſſe autem eiuſmodi ſupponamus], etiam ſecundum fore productum maximum omnium ſimilium ex binis ſegmentis rectæ poſitæ A B.

Sumatur in AB alius punctus præter punctum C, & eſto, D; qui accipi à nobis poteſt infra punctum C, vel ſupra. In vtroque caſu FA, nequit habere eam rationem ad AC, quam habet ad AD, ſed maiorem aut minorem habebit, atque adeò F D non eſt ſecta in puncto A ſecundum rationem ipſius F A ad A C: fiat porrò FE ad ED, vt FA ad AC, & productum FE 2 in E D 3, per ſecundum Lemma, erit maximum [æquè ac productum FA 2 in AC 3] & conſequenter maius ſimili producto FA 2 in AD 3, facto ex ſegmentis eiuſdem rectæ F D. Quod maximum FE 2 in ED 3 habet eandem rationem ad FD 5, dignitatem ſibi homogeneam, quam F A 2 in AC 3 ad F C 5, vt ex duobus primis Lemmatibus colligitur; igitur FA 2 in AD 3 [quod diximus eſſe minus producto FE 2 in ED 3] minorem rationem habet ad FD 5, quàm FE 2 in ED 3 ad idem FD 5, ſeu minorem, quàm FA 2 in AC 3 ad FC 5; & permutando, FA 2 in AD 3 minorem habet rationem ad FA 2 in AC 3 [ſeu, per Lemma quartum, AD 3 minorem habet rationem ad AC 3] quam FD 5 ad FC 5, & longè minorem, quàm C B 5 ad B D 5. Quippe ſunt rectæ DB, CB, FC, & F D, Arithmeticè proportionales cum exceſſu D C; ac propterea in primo caſu FD, maxima, in ſecundo caſu FD, minima eſt ad FC in minori ratione quàm CB ad DB, & quintuplicata ratio FD ad FC, nempe ratio ipſius FD 5 ad FC 5, eſt minor quintuplicata ratione CB ad DB, ſeu CB 5 ad D B 5.

Igitur cum quatuor quantitatum, AD 3, AC 3, CB 5, & DB 5, prima ad ſecundam habeat minorem rationem, quàm tertia ad quartam, per quintum Lemma, productum AD 3 in DB 5 factum ex duabus extremis, erit minus producto AC 3 in CB 5 ex medijs. Similiter oſtendes, aliud quodcumque productum ſimile minus eſſe producto A C 3 in C B 5, quia punctus D ad libitum ſumitur. Ergo A C 3 in C B 5 productum eſt maximum omnium. Quod &c.

Hactenus de recta linea AB inæqualiter ſecta, quum eſt ſegmentum maius ad minus, vti numerus ad numerum. Reſtaret altera pars Theorematis, quum eſt quemadmodum maius ſegmentum ad minus, ſic numerus ad vnitatem. Hoc tamen conſtructione ac ratione tàm ſimilibus modò factis concluditur, vt id ſibi quiſque inuenire, explicare ac dilatare facillime poſſit. Lectoribus autem ſcribimus à Geometria & ab Algebra inſtructioribus, quos huiuſcemodi rerum intellectu facilium explicatione fruſtra defatigaremus; Quare pergimus ad reliqua vſum præſtantiſſimum habentia ad inueniendas plurium linearum tangentes, figurarum centra grauitatis & quadraturas, & ad alia, item multa, quæ iuſto ſeruamus Operi; vbi dabimus nouam ſolidorum Conicorum ſeriem, qui ſecti exhibent infinitas, vti vocant, hyperbolas, infiuitas parabolas, infinitas ellipſes, &, analogiam ſeruando, circulos etiam infinitos. Vnde Lectoribus manifeſtè apparebit, de Conicis me plus multò adinueniſſe, quàm cæteros, eoſque ingenioſiſſimos Viros, qui communem tantum hyperbolen, parabolen, ellipſin, & circulum [figuras Conici in noſtra noua ſerie prædicta, ſecundi gradus] agnouerunt: alias tertij & quarti & cæterorum non item; niſi quod de parabolis infinitis per puncta in plano deſcriptis pauca, licet cognitione digniſſima, tradidere nonnulli, quos inter, duo præcellentes ingenio viri, Fermatius. ac Torricellius, præceptor meus, inuentorum præſtantia & numero commendabiles, ac Veteribus proximi; qui nouū inſuper excogitarunt hyperbolarum infinitarum genus. Neque prætereundum puto, quāplures Apollonij propoſitiones, atque demōſtrationes aptari ſectionibus noſtris & per omnia congruere, affectaſque multipliciter æquationes harum ſectionum ope reſolui facillimè, & determinari poſſe. Nunc reuertor ad rem.

THEOREMA III.

Data recta linea, & duobus terminis, ſecundum quos fiat in linea data productum: hoc erit

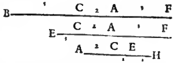
omnium

maximum omnium ſimilium productorum, quæ fieri poſſunt ex binis eiuſdem rectæ ſegmentis, velut ex radicibus.

Propoſitionem ſeco in partes duas. Primum dico, productum, quale deſcripſimus, eſſe omnium ſimilium maximum, quum dantur termini æquales; quod in primo Theoremate demonſtrauimus.

Deinde ſi dantur termini inæquales, ſic rem oſtendo.

Eſto AB, recta data, & termini dati 5 & 2. Secetur recta in puncto C, ſitque BC ad CA, vt 5 ad 2. Dico productum B C 5 in C A 2 factum in linea data ſecundum terminos datos eſſe maximum. Producatur BA in F, vt AF ſit differentia ſegmentorum,& diuidendo primam



porportionalitatem, nempè B C ad CA, vt 5 ad 2 [ſicut in tertio Lemmate præſcribitur] pergamus vſque dum incidamus in porportionem æqualitatis. In noſtra hypotheſi, primum erit, diuidendo 3, ad 2, vt F A differentia ſegmentorum ad AC minus ſegmentum; quam ſecundam porportionalitatem exhibet ſecunda figura,in qua ſiat CE differentia ſegmentorum CA, FA. per conſequens erit, diuidendo 1, ad 2,vt CE ad AC; quamquidem proportionalitatem ſeorſim exhibet tertia figura. Fiat E H differentia ſegmentorum C E, & AC, diuidendo erit 1 ad 1, vt EH ad EC; quæ eſt demum proportio æqualitatis;ſemper autem minus ſegmentum producimus vt æquemus maiori, & ſegmentorum differentiam conſtituamus.

At retrorſum viciſſim,incipiendo à recta EA tertiæ figuræ, cuius maius ſegm. AC eſt 2, minus ſegm. CE eſt 1, & illorum differentia H E itidem 1. Quoniam productum HE 1 in CE 1 eſt maximum in linea C H, per primum Theorema noſtrum, erit proinde, per ſecundum Theorema, EC 1 in CA 2 maximum in recta E A.

Deinde in recta FC ſecundæ figuræ, maius ſeg. AF eſt 3, minus AC eſt 2, & ſegmentorum differentia EC eſt 1; porrò cum EC 1 in CA 2 ſit maximnm,erit per ſecundum Theorema, etiam maximum in recta FC productum AF 3 in AC 2.

Poſtremò in linea AB primæ figuræ,productum AF 3 in AC 2 eſt maximum, vt modò oſtendimus, ergo per ſecundum Theorema eſt etiam maximum AC 2 in B C 5. Quod demonſtrandum erat.

Si loco duorũ numerorũ detur numerus,& vnitas,ſit ſimilis cũſtructio,& demonſtratio.

SCHOLION.

Id quod in ſecundo Theoremate ſupponebamus; data recta linea, & datis, numeris 3, & 2, maximum fore productum in ea linea factum ſecundum numeros illos datos; nunc demonſtrauimus in Theoremate hoc. Erat porrò illius Theorematis propoſitio conditionalis, ex poſita illa hypotheſi, non abſoluta, vt patebit conſideranti.

COROLLARIVM.

Si productum genitum ex dignitate ducta indignitatem quamcumq; maximũ fuerit, illarum dignitatum radices & exponentes erunt Geometricè proportionales. Quippe in Theoremate oſtendimus, productum in linea factum ſecundum terminos datos eſſe omnium maximũ; at productum eiuſmodi, ex 5, definitione noſtra, gignitur ex duabus dignitatibus, quarum exponentes rationem eam habet, quam dignitatum earundẽ radices.

PROBLEMA I.

Datam lineam rectam ita ſecare, vt productum ex dignitatibus ſegmentorum ſit omnium ſimilium maximum.

Sumantur exponentes duarũ illarũ dignitatum, rectaq; diuidatur in ratione horũ exponentium, & factum erit quod imperatur; quia productũ erit in linea data factũ ſecundum terminos poſitos,nimirũ ſecundũ exponẽtes;ac proinde erit maximũ per Theorema tertiũ.

PROBLEMA II.

Æquationem determinare, in qua poteſtas quæſita radicis negatur de homogeneo ſub radice ⅃ 2 data,

data, & dignitate ſua parodica, vt B in A - A 2 || Z 2 : vel B in A 3 - A 4 || Z 4 &c.

Oritur huiuſmodi æquatio ex dicta parodica dignitate poteſtatis negatæ ducta in B-A, differentiam datæ & quæſitæ radicis. Rem probo. Illa parodica dignitas affirmata, ſi primùm ducatur in A, radicem quæſitam negatam, gignet poteſtatem negatam vno gradu altiorem, quàm ſit ea parodica dignitas [vt patet ex natura multiplicationis]. deinde in † B radicem datam affirmatam ducta, gignet homogeneum affirmatum, ſub eadem dignitate parodica & radice data: Quæ duo producta ſunt ipſa pars æquationis, de qua in Problemate. Pars altera eſt homogeneum comparationis.

Rurſus, per Lemma quartum, ratio homogenei ad poteſtatem negatam eſt eadem, ac radicis datæ ad quæſitam; ſed minor eſt poteſtas homogeneo, de quo ipſa negatur & demitur. Ergo etiam radix quæſita minor eſt data; In qua proinde radice data nos rectè ſumimus ſegmentum æquale radici quæſitæ A, vt alterum ſegmentum ſit B-A, differentia datæ ac quæſitæ radicis.

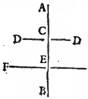
Quoniam igitur prima pars æquationis oritur ex B-A vno radicis datæ ſegmento, ducto in alterum ſeg. A, vel in huius poteſtatem, efficitur [per tertium Theorema] vt inde reſultans productum ſit maximum omnium ſimilium, quotieſcunque A, & B-A, ſegmenta rationem habent eam, quam exponentes ſuarum dignitatum. Sic in æquatione B in A 3 - A 4 || Z 4; ſi A, & B-A fuerint vt 3 ad 1, cubus ſegmenti A in B-A ductus gignet partem æquationis B in A 3 - A 4; quæ eſt productum in linea data B, omnium ſimilium maximum; cuius proinde magnitudinem non poteſt vnquam excedere homogeneum comparationis, quod ſemper æquari neceſſe eſt illi alteri æquationis parti. Vnde canon pro determinanda Problematis æquatione conficitur.

Fiat in radice maximum productum ſecundum terminos, qui ſunt exponentes eiuſdem radicis & parodicæ dignitatis, ſub quibus eſt homogeneum. Illius producti magnitudinem excedere non poteſt homogeneum comparationis.

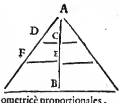
Idem procedit in alia æquatione orta ex multiplicatione ipſius, A, in B-A, vel in huius poteſtatem; ſemper enim eſt idem caſus tertij Theorematis noſtri, in quo productum factũ in linea [ſeu data radice B] ſecundum terminos datos eſt maximum; termini verò ſunt exponentes dignitatum ſegmenti A & alterius B-A.

Sed vno vel altero exemplo de Geometricis noſtris Opuſculis deprompto methodi facilitatem comprobemus.

E ſingulis punctis datæ rectæ AB ducãtur rectæ CD, EF, &c. rectæ inter ſe parallelæ, cũ data AB angulum quemcumq; efficientes. Sint autem harum parallelarum dignitates, & dignitates abſciſſarum AC, AE &c. Geometricè proportionales (id quod tripliciter contingere poſſe mox patebit) Tranſibit per extrema parallelarum puncta D, F, &c. perimeter figuræ, cuius diameter aut axis erit AB, vertex A, ordinatim verò ad diametrum applicatæ erunt ipſæ parallelæ.



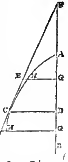
Nam parallelarũ abſciſſarumq; dignitates ſi fuerint eiuſdẽ gradus, e. g. FE 1 ad DC 1, vt AE 1 ad CA 1; vel cubi parallelarũ vt cubi abſciſſarum, figura erit triangulum, cuius proprietas notiſſima eſt, non parallelas modò & abſciſſas eſſe Geometricè proportionales, ſed parallelarũ & abſciſſarũ earumdem poteſtates omnes homogeneas; quarum ratio æquè multiplex eſt rationis linearũ ſeu radicum; ita vt cubi, & quadrato quadrata, &c. abſciſſarũ ſint vt cubi, & quadrato quadrata &c. parallelarum; & illorum quoque radices Geometricè proportionales.



Sin autem diuerſorum graduum fuerint dignitates parallelarum & abſciſſarũ, linea deſcripta erit curua, habens ſuum axem, & ad illum ordinatim applicatas, quarum dignitas eſt gradu ſuperior dignitate abſciſſarum; at contra dignitas applicatarũ ordinatim ad rectã [quæ curuam in vertice contingit] ſumptam pro axe, gradu inferior eſt dignitate abſciſſarum tangentis. De quo alibi latiùs dicam.

Eſto

Eſto igitur A' DB, vna ex præſatis figuris, eiuſque axis AB, & vertex A; in qua quidem gradus dignitatis parallelarum ſit altior gradu dignitatis abſciſſarum; quæratur autem linea recta contingens figuram in puncto dato C. Ducatur ex hoc puncto linea ad axem ordinatim applicata, vt CD, & ponantur exponentes dignitatum, 3, & 2. Erunt conſequenter in figura parallelarum cubi vt quadrata abſciſſarum. Fiat abſciſſa A D, inter verticem & ordinatim applicatam, ad A F, axem productum, vt minor numerus 2 ad, 1, differentiam exponentium, ductaque F C; Dico hanc eſſe tangentem quæſitam.

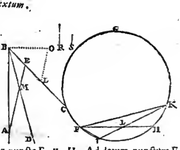


Productum enim FA 1 in AD 2 in linea D F, factum ſecundum terminos poſitos 1 & 2, eſt maximum, per Theorema tertium; ſemperque homogeneum dignitati parallelarum; (cum parallelarum dignitatē exponat maior datorum numerorum, maximum verò productum illud oriatur ex dignitatibus quas exponunt minor numerus & differentia numerorū, quæ duo ſimul efficiunt numerum maiorem). Ergo ſi accipiamus alium punctum G in axe ſupra D, aut infra, & ducamus ordinatim applicatam G H, quæ ſecet in E rectam F C (vbi opus fuerit productam); productum FA 1 in AG 2 non erit maximum in linea F G, quale eſt FA 1 in AD 2 in recta FD; propterea quod maior eſt vel minor ratio ipſius FA ad AG, quàm ad AD, & conſequenter FG, FD non ſunt porportionaliter diuiſæ. Ergo maiorem rationem habet FA 1 in AD 2 ad FD 3 ſibi homogeneum, quàm FA 1 in AG 2 ad FG 3, & permutando, maiorem rationem habet FA 1 in AD 2 ad FA 1 in AG 2, vel ex Lemmate quarto AD 2 ad AG 2) quàm FD 3 ad FG 3. Sed AD 2 ad AG 2 ponitur in figura; vt CD 3 ad HG 3: FD 3 ad FG 3, ob ſimilitudinem triangulorum, vt CD 3 ad EG 3. Ergo maiorem rationem habet CD 3 ad HG 3, quàm CD 3 ad EG 3; & conſequenter CD maiorem rationem habet ad HG, quàm ad EG, ac proinde HG recta eſt minor quàm EG, & punctus E cadit extra datam curuam AHCH. Eodem pacto de ſingulis punctis ductæ lineæ FC demonſtratur illos cadere ſemper extra curuā. Ergo FC eſt illius tāgens. Quod &c.

Hæ ſunt parabolæ, vt vocant, infinitæ, quarum contingentes lineæ, quo modo ad datū punctum duci poſſint, oſtendimus. Nunc eandem methodum in hyperbolis quoque libet experiri. Præmittimus autem hoc neceſſarium Lemma.

Lemma ſextum.

Dato angulo A B C, vtcumque ſecto per rectam B D, & puncto E in alterutro laterum comprehendentium angulum datum; ex eo puncto ducere lineam rectam quæ angulum A B C ſubtendat & à recta B D, ſecetur in data ratione R ad S.

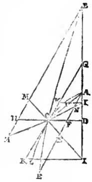


Fiat H G F ſegmentum circuli capiens angulum æqualem dato, & compleatur circulus; deinde vt R ad S, ita fiat F L ad L H; vt angulus A B D ad E B D, ſic arcus F I ad I H; ductaque I L producatur vſque dum pertingat ad K in circumferentia circuli, & connectantur puncta F, K, H. Ad datum punctum E fiat angulus B E A æqualis K H L, & E A ſecet BD in M & B A in puncto A. Dico rectam E A eſſe quæſitam, quæ à B D in M diuiditur in ratione data.

Siquidem anguli H & E: k & B ſunt æquales, & hi ſecti proportionaliter [per trigeſimam tertiam ſexti Elementorum] à k L I, & B D. Ergo triangula F H K, A B E ſunt æquiangula, & AE ad EB, vt HF ad Hk. Ruſus æquiangula ſecimus triangula MBE, LkH, & conſequenter EB eſt ad EM, vt Hk ad HL, & ex æqualitate ordinata AE ad EM, vt HF ad HL, & diuidendo FL ad LH [ſeu R ad S] vt AM ad ME. Quod &c.

Quod ſi punctus datus ſit extra, vt in O, ducemus BO rectam [punctus autē O ſic detur oportet, vt OB recta cum AB angulum faciat, nec ſit ad lineam poſita] & faciemus angulū BOL æqualem differentiæ angulorum EBO, & H, & OL producta ſatisfaciet Problemati.

Sit



Sit hyperbole A C L, cuius diameter AB, vertex A, & dignitates ordinatim applicatarum habentes eam proportionem quam producta illis dignitatibus homogenea, orta ex dignitate abſciſſæ ducta in dignitatem, abſciſſæ & diametri, ex quibus vna recta conflata intelligatur. Exempli gratia, quadrato cubi ordinatarum, hoc eſt LI 5 ad CD 5, ſint, vt producta B I 3 in A I 2 ad BD 3 in AD 2, genita ex quadratis abſciſſarum A I, AD, & cubis rectarum BI, BD, quippe quas efficiunt eædem abſciſſæ & diameter.

Detur punctus C, ad quem ducenda ſit tangens, & ordinatim applicetur CD. Porrò ducatur BC, producta ad partes C, quoad oportuerit, & ex Lemmate præcedenti AE [ſecans CD in F, & in F item ſecta pro ratione 2 ad 3, qui numeri exponunt dignitates gignentes producta BI 3 in A I 2, & BD 3 in AD 2, ſubtendens angulum ECA], & tandem GC, parallela rectæ AE, occurrens ipſi AB in G. Dico tangentem quæſitam eſſe C G.

Sumatur in CG alius punctus K ſupra & infra C, &, ordinatim applicatis K I ſecantibus hyperbolen in L, ab I puncto ducatur IC incidens in rectam HB in puncto M, & ſecans AE in N; quæ HB ipſi AE parallela occurrit DC productæ in H.

Quoniam verò AE ſecatur in F in ratione 2 ad 3, FA 2 in FE 3, per tertium Theorema, eſt productum maximum, & ratio FE 3 ad NE 3, ſeu HB 3 ad M B 3 [propter ſimilitudinem triangulorum HCB, ECF: MBC, CEN] maior eſt ratione NA 2 ad AF 2. Ergo per Lemma quintum maius eſt HB 3 in AF 2 ipſo MB 3 in NA 2; quæ duo producta ſi comparentur cum CG 5, primum habebit maiorem rationem ad CG 5, quàm ſecundum. Sed ratio primi, quod eſt HB 3 in AF 2, ad CG 5 eadem eſt ac ratio BD 3 in AD 2 ad GD 5 [cum HB ad CG ſit vt BD ad GD, ob ſimilitudinem triangulorum HBD, CGD; candemque proportionem habeant earum linearum cubi: tùm C G 2 ad A F 2, vt G D 2 ad A D 2]: ratio ſecundi, ſeu M B 3 in N A 2, ad C G 5 eſt eadem ac ratio B I 3 in A I 2 ad I G 5 [quia ſimilia ſunt triangula M B I, C G I; & M B, C G, B I, I G, rectæ earumque cubi proportionales: rurſus vt G I 2 ad I A 2, ſic C G 2 ad A N 2] Ergo maiorem rationem habet B D 3 in A D 2 ad G D 5, quàm B I 3 in I A 2 ad G I 5, & permutando B D 3 in A D 2 ad B I 3 in A I 2 [ſeu ex natura hyperboles C D 5 ad L I 5] maiorem rationem habet, quàm D G 5 ad G I 5, ſeu [ob ſimilitudinem triangulorum K G I, C G D] C D 5 ad I K 5, & per decimam quinti Elementum dignitas L I 5, minor eſt, quàm K I 5, & ſua radix, L I recta, minor recta K I; quare punctus K eſt extra curuam. Sic de cæteris punctis oſtendetur cadere extra curuam, atque adeò C G, hyperbolen tangere in ſolo C puncto. Quod &c.

Hæc porrò demonſtratio etiam ad ellipſes, & circulos accommodari poteſt.

Iàm verò quàm latè pateat vſus noſtri Theorematis tertij, ex propoſitis exemplis licet intelligere; nec ita multum diſſimili aut difficiliori via centra grauitatis, & quadraturas, quorum problematum paulò ante meminimus, inuenimus. Interim, ſi quis Apollonij conſtructionem atque demonſtrationem trigeſimæ quartæ propoſitionis primi Conicorum libri cum noſtris comparabit, nonnihil fortaſſe proficiet in Arte dilatandi propoſitiones & demonſtrationes. Nam id quod ille de quadratica tantum hyperbole, ellipſi, & circulo ſtatuit, nos ad omnes porrigimus hyperbolas, ellipſes, circuloſque infinitos. Quam viam placuit indicare, & ſupradicto exemplo confirmare.

Francis-

Franciſco Mariæ Naldinio S. Stephani Equiti, atque Diſcipulo ſuo eruditiſſimo
Carolus Renaldinius F.

PAucis ab hinc annis, cum apud te Ruri quam humaniſſimè eſſem hoſpitio ſuſceptus Theorema quoddam adinueni, magni ſanè momenti, & à nemine, quod ſciam animaduerſum. Illud porrò tunc Arithmeticè primò quidem exhibui, mox animum ad illud idem Geometricè tractandũ appuli Vtroque modo tibi tranſmittendum operæ pretium duxi, apud te enim ortum aliquo modo tuum eſſe non immerito dixerim; eoque libentius id à me factum exiſtimes, velim, quod te quotidie magis rerum nouarum in Mathematicis ſtudijs ardere deſiderio ſatis intelligo; nulla tamen animum admiratione ſubeunte, cum ingenuitas indolis, qua te natura donauit, id prorſus ea poſcat.

Quod attinet ad obſeruationem Lunaris Eclipſeos celebratæ anno labente 1670; menſe Septembris D. 28. Cælum ferè ſemper nubibus obuolutum cum fuerit initium, & finem occultauit; quatenus tamen cælum oculis vſurpare licuit, ſtellaſque fixas intueri, vt earum altitudinibus deprehenſis, temporis momenta calculo aſſequeremur, breui vt ſpero inter nos communicabimus. Cæterum in huiuſmodi obſeruationibus vſi ſumus Tubo cum craticula; longitudinis quatuor ferè brachiorum; Quadrans erat iuſtæ magnitudinis, cum eius coſta foret duorum brachiorum, aderat doctiſſimus Geminianus Montanarius, in obſeruando ſuam adhibens induſtriam, qui huc ob negotia quædam literaria ſe contulit. Tu interim de tuo ſtatu; m isque de conatibus egregijs ad excolendam virtutem, ſi quid mihi ſignificaueris; argumentum erit amoris in me tui, quo vehementer delector; D. Dom. Andream fratrem tuum ſaluere iubeas velim. Tu interim Vale. Scribebam Patauij: Anno à Virginis partu M. DCLXX.

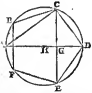
THEOREMA.

Si ſit circulus, cuius diameter A D, in quo pentagoni B C D E F; latus D C; ductaque ſit A C; Dico ipſam A C; longitudine eſſe hexagoni, & decagoni latus.

Ideo videtur Theorema mirandum, quòd C D, pentagoni latus, vt Euclid. oſtendit lib. XIII. Prop. 10. poteſt hexagoni, atque decagoni latus; at verò A C, eadem latera longitudine. Si numeris illud tractare libet, ex hypotheſi, quod diameter ſit 12. latus pentagoni erit ℞ (90 -- ℞ 1620) at ſi ex 144. quadrato diametri auferamus 90 -- ℞ 1620, nempe quadratum ipſius ℞ (90 -- ℞ 1620) remanebit 54 + ℞ 1620, pro quadrato ipſius A C, ex 47. primi Elementorum; vnde pro ipſa A C, remanebit ℞ (54 + ℞ 1620) hoc eſt 3 + ℞ 45. binomium enim illud 54 + ℞ 1620, quadratum eſt, cuius latus eſt 3 + ℞ 45. At verò hexagoni latus eſt 6; quo addito ad ℞ 45 -- 3. Decagoni latus (eſt enim ℞ 45 -- 3, latus decagoni in circulo, cuius diameter eſt 12) fit 3 + ℞ 45.

Geometricè tamen hæc eadem hunc in modum Analyticè præſtabimus.

RESOLVTIO.



Quoniam A C, eſt longitudine latus hexagoni, vna cum latere decagoni, ergo quadratum A C, æquabitur quadrato lateris hexagoni, plus quadrato lateris decagoni, plus duplo rectangulo, ſub iiſdem lateribus; ſed quadratum DC, æquale eſt *a*, quadrato lateris hexagoni, plus quadrato lateris decagoni. Æqualibus vtrinque additis, quadratum A C, plus quadrato C D, æquabitur quadrato lateris hexagoni, plus quadrato lateris decagoni plus duplo rectangulo ſub iiſdem lateribus, vna cum quadrato lateris hexagoni, plus quadrato lateris decagoni, ergo quad. AC, plus quadrato CD, æquabitur duplo quadrato lateris hexagoni, plus duplo quadrato lateris decagoni, plus duplo rectangulo ſub iiſdem lateribus, ſed quadratum A D, æquale eſt, quadratis A C, C D, ergo quadr. A D, æquabitur duplo quadrato lateris hexagoni plus duplo quadrato lateris decagoni, plus duplo rectangulo ſub iiſdem lateribus; hoc eſt quadruplum quad. lateris hexagoni, æquabitur duplo quadrato lateris hexagoni, plus duplo quadrato lateris decagoni, plus duplo rectangulo ſub iiſdē lateribus, ergo duplũ quadr. lateris hexagoni, æquabitur quadrato lateris hexagoni, plus quadrato lateris decagoni, plus rectangulo ſub iiſdem lateribus ergo quadratum lateris hexagoni, æquabitur quadrato lateris decagoni, plus rectangulo ſub iiſdem lateribus. Quod ita ſe habet ex lib. XIII. prop. 11. Elementorum.

a prop 10 lib. XIII. Elemēt.

COMPOSITIO.

Quoniam quad. lateris hexagoni, æquale eſt quadrato lateris decagoni, plus rectangulo ſub iiſdem lateribus, ergo duplum quadratum lateris hexagoni, æquabitur quadrato lateris hexagoni, plus quadrato lateris decagoni, plus rectangulo ſub iiſdē lateribus; ergo quadruplũ quad. lateris hexagoni, æquabitur duplo quadrato lateris hexagoni, plus duplo quadrato lateris decagoni, plus duplo rectangulo ſub iiſdem lateribus; hoc eſt quadratum A D, æquabitur duplo quadrato lateris hexagoni, plus duplo quadrato lateris decagoni, plus

duplo

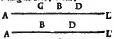
duplo rectangulo ſub iiſdem lateribus, Sed quadratum A D, æquale eſt quadratis A C, C D, ergo quadrata A C, C D, æqualia erunt quadrato duplo lateris hexagoni, plus duplo quadrato lateris decagoni, plus duplo rectangulo ſub iiſdem lateribus. Sed quadratum C D, æquale eſt quadrato lateris hexagoni, plus quadrato lateris decagoni, ergo æqualibus vtrunque ſublatis, quadratum A C, æquabitur quadrato lateris hexagoni, plus quadrato lateris decagoni, plus duplo rectangulo ſub iiſdem lateribus, ergo A C, erit longitudine latus hexagoni, plus latere decagoni.

Ad Problema illud quod attinet de diuiſione trianguli per rectam à puncto extra, vel intra triangulum, multa mihi dicenda occurunt, de quibus aliquando coram. Interim adnotabo, ad illud reſoluendum, cum punctum primo fuerit extra, in neutro tamen è lateribus producto, facere hæc; nempe.

A dato angulo per elatum in latere punctum, triangulum abſcindere æquale triangulo dato. Item.

Data ſit e, g. recta A L, infinita ſecta quidem in C, & B. Oportet iterum illam diuidere in D, vt A B, C D, A D, ſint proportionales. Item

Data ſit recta A L, diuiſa quidem in B, oporteat iterum illam diuidere in D, vt A B, B D, A D, ſint proportionales. Tandem



Ex dato angulo triangulum abſcindere æquale ſpatio per lineam ductam ex dato extra triangulum puncto.

Horum præſidio Problemati fiet ſatis; ſic etiam ſuo modo cum punctum fuerit intra, &c. de quibus coram vt dixi. Vale.

FINIS.

Noi Reformatori dello Studio di Padoua.

Hauendo veduto per fede del Padre Vicario Generale del Sant' Officio di Padoa, nel Libro intitolato *Caroli Renaldini Tractatus de Algebra Specioſa*, &c. non eſſerui coſa alcuna contro la Santa fede Cattolica, e parimente per atteſtato del Segretario noſtro, niente contro Prencipi, e buoni coſtumi, concediamo licenza agl' Heredi di Paolo Frambotto di poterlo ſtampare oſſeruando gli Ordini &c.

Dat. à 21. Ottobre 1670.

{ Nicolò Sagredo Cau. Pr. Ref.
{ Battiſta Nani Cau. Pr. Ref.

Angelo Nicolo ſi Segr.

N-

INDEX

Eorum, quæ in hoc Tractatu continentur.

DE uſu Vnitatis in Geometria agendum proponitur pag. 3

Magna iſtius uſus utilitas. ibidem

Duo ſunt de quibus oportet Analyſtam eſſe ſollicitum. ib.

Olim impoſſibile credebatur Problematibus ſatisfacere, quę Auctor reſoluenda ſuſcipit. ibid.

Quando non fit aſcenſus ſupra plana nullius laboris eſt Problemata reſoluere.

Tractionis argumentum. pag. 4

Auctoris Methodus magnam habet utilitatem adiunctam.

Tractandorum ordo.

Appendia de Maximis, & Minimis, ubi habeatur.

Recenſiturum Methodus pro Maximis, & Minimis indagandis, maxime commendabilis.

Huius Methodi excellētia, ac dignitas.

De Geometricis Effectibus. pag. 5.

Effectiu quid ſit in Analyticis. ib.

Quo ſenſu Mathematicæ de re operabili dici poſſent, & qua ratione practicę.

Omne linearum genus in effectionibus adhiberi poteſt.

In quo potiſſimum Artificis ſolertia poſita ſit.

Primus conſiderandus modus, quo Problemata ſolida conſtruxerunt

Modum quo Problemata ſolida ad æquationes trium, vel quatuor dimenſionum reuocata Carteſius conſtruxerit. p. 6.

Lineæ Mediceæ quas Auctor ad generalem effectionem Problematum excogitauit, explicantur. pag. 12.

Primum genus Linearum Medicearū, & ad hoc primum genus pertinentium prima.

Pro effectione Geometrica, cum æquatio fuerit $a^3 + ba = z^3$

Ad primum genus pertinentium Linearum Medicearum ſecunda. pag. 13

Pro effectione Geometrica, cum æquatio fuerit $a^5 + b^3 a = b^3 d$.

Ad primum genus, pertinentium Linearum Medicearum tertia. pag. 14

Pro effectione Geometrica, cum æquatio fuerit $a^4 + b a^3 = b^3 d$.

Ad primum genus pertinentium Linearum Medicearum quarta. pag. 15

Pro effectione Geometrica, cum æquatio fuerit $a^6 + b^5 a = b^5 d$.

Ad primum genus pertinentium Linearum Medicearum quinta. pag. 16

Pro effectione Geometrica, cum æquatio fuerit $a^6 + b a^5 = b^5 d$.

Ad primum genus pertinentium Linearum Medicearum ſexta. pag. 17

Pro effectione Geometrica, cum æquatio fuerit $a^6 + b^2 a^4 = b^5 d$.

Ad primum genus pertinentium Linearum Medicearum ſeptima. pag. 19

Pro effectione Geometrica, cum æquatio fuerit $a^5 + b^4 a = b^4 d$.

Ad primum genus pertinentium Linearum Medicearum octaua. pag. 20

Pro effectione Geometrica, cum æquatio fuerit $a^5 + b^5 a^2 = b^3 d^3$.

Ad primum genus pertinentium Linearum Medicearum nona. pag. 21

Pro effectione Geometrica, cum æquatio fuerit $a^5 + b^2 a^3 = b^5 d^3$.

Ad primum genus pertinentium Linearum Medicearum decima.

Pro effectione Geometrica, cum æquatio fuerit $a^5 + b a^4 = b^4 d$. pag. 22

Secundum genus Linearum Medicearum, & ad huiuſmodi genus pertinentium Prima.

Pro effectione Geometrica, cum æquatio fuerit $a^3 - b a = z^3$. pag. 23

Ad ſecundum genus pertinentium Linearum Medicearum ſecunda.

Pro effectione Geometrica, cum æquatio fuerit $a^5 - b^3 a = b^3 d$. pag. 24

Ad ſecundum genus pertinentium Linearum Medicearum tertia.

Pro effectione Geometrica, cum æquatio fuerit $a^5 - b a^3 = b^3 d$. pag. 25

Ad ſecundum genus pertinentium Linearum Medicearum quarta.

Pro effectione Geometrica, cum æquatio fuerit $a^4 - b^5 a = b^5 d$. pag. 26

Ad ſecundum genus pertinentium Linearum Medicearum quinta.

Pro effectione Geometrica, cum æquatio fuerit $a^4 - b a^5 = b^5 d$. pag. 27

Ad ſecundum genus pertinentium Linearum Medicearum ſexta.

Pro effectione Geometrica, cum æquatio fuerit $a^4 - b^3 a^3 = b^3 d$. pag. 29

Ad ſecundum genus pertinentium Linearum Medicearum ſeptima.

Pro effectione Geometrica, cum æquatio fuerit $a^5 - b^4 a = b^4 d$. pag. 30

Ad ſecundum genus pertinentium Linearum Medicearum octaua.

Pro effectione Geometrica, cum æquatio fuerit $a^5 - b^5 a^2 = b^3 d^3$. pag. 31

Ad ſecundum genus pertinentium Linearum Medicearum noua.

Pro effectione Geometrica, cum æquatio fuerit $a^5 - b^2 a^5 = b^5 d^3$. pag. 32

Ad ſecundum genus pertinentium Linearum Medicearum decima.

Pro effectione Geometrica, cum æquatio fuerit $a^5 - b a^4 = b^4 d$. pag. 33

Tertium genus Linearum Medicearū, & ad huiuſmodi genus pertinentium prima.

Pro effectione Geometrica, cum æquatio fuerit $b a - a^2 = z^2$. pag. 34

Ad tertium genus pertinentium Linearum Medicearum ſecunda.

Pro effectio Geometrica, cum æquatio fuerit $b a^3 - a^5 = b^3 d$. pag. 35

Ad tertium genus pertinentium Linearum Medicearum tertia.

Pro effectione Geometrica, cum æquatio fuerit $b^3 a - a^5 = b^3 d$.

Ad tertium genus pertinentium Linearum Medicearum quarta.

Pro effectione Geometrica, cum æquatio fuerit $b a^5 - a^4 = b^3 d$. pag. 38

Ad tertium genus pertinentium Linearum Medicearum quinta.

Pro effectione Geometrica, cum æquatio fuerit $b^3 a^3 - a^4 = b^5 d$. pag. 39

Ad tertium genus pertinentium Linearum Medicearum ſexta.

Pro effectione Geometrica, cum æquatio fuerit $b^5 a - a^6 = b^5 d$. pag. ibid.

Ad tertium genus pertinentium Linearum Medicearum ſeptima.

Pro effectione Geometrica, cum æquatio fuerit $b a^4 - a^5 = b^5 d$. pag. 40

Aliud quoddam genus Medicearum Linearum.

Pro effectionibus Geometricis, cū æquatio fuerit multiplicis affectionis. pa. 42

Definitiones. pag 42

De vnitatis uſu in Geometria. pa. 43

Propoſitio prima. Quo pacto planum unitatis præſidio in ſimplicem longitudinem tranſmutetur. pag. 44

Propoſitio ſecunda. Quo pacto ſolidum unitatis præſidio in ſimplicem longitudinem tranſmutetur. pag. 45

Propoſitio tertia. Plano-planum in ſimplicem longitudinem tranſmutare.

Quæ hactenus tradita ſunt exemplis illuſtrantur.

Problema. Datum ſit latus 12. diuidendum in duas partes, vt rectangulum ſub partibus æquale ſit dato plano.

Poriſma. Sume dimidium numeri radicum, & ab eius quadrato, aufer comparationis homogeneum, ſiue numerum abſolutum, reſidui latus quadratum ſubtrahe ex dimidio iam dicto, quod remanet erit pars maior.

Speciebus idem abſoluitur. pag. 46

Poriſma: Sumatur dimidium coefficientis longitudinis ſublateralis, & ab eius quadrato auferatur homogeneum comparationis, reſidui autē latus quadratum auferatur ex prædicto dimidio; quod enim ſupereſt erit pars minor quæſita.

Problema. Datum latus ita diuidere, vt quadratum vnius partis ad rectangulum ſub toto, & altera parte datam habeat rationem. pag 48

Poriſma. Quadrato dimidiæ coefficientis ſublateralis addatur rectāgulum factum à latere diuidendo in illud, ad quod latus diuidendum in eadem eſt ratione in qua eſt terminus conſequens rationis datæ ad terminum antecedētem; aggregati verò ſumatur latus, & ei ſubducatur coefficientis dimidium; reſiduum enim erit radicis pretium, & partem vnam quæſitam diuidendi lateris exhibebit; reliqua verò non latebit.

Generalis ratio reſoluendi, quam Auctor adinuenit. pag. 49

Scholion in quo definitiones explicantur. pag. 51

Problema. Datis baſe, & perpendiculo, dataque ratione aggregati ex vno latere, & perpendiculo, ad aggregatum ex alio latere, & perpendiculo reperire triangulum.

Hoc idem Problema generali ratione ab Auctore adinuenta, facilius reſolui poteſt. pag. 57

Helenæ Corneliæ laudes. pag. 58

Ratio applicandi rectam inter conuexum peripheriæ, & diametrum productam. pag. 60

Dato vno ex lateribus trianguli rectanguli, dataque differentia ſegmentorum baſeos, reperire triangulum.

Poriſma. Ad quadratum e quarta parte differentiæ ſegmentorum baſeos, addatur dimidium quadrati lateris dati,

I N D E X

circa rectum, aggregati latus multratum eadem quarta parte differentiæ ſegmentorum baſeos, exhibebit ſegmentum minus baſeos, vnde ſegmentum maius non latebit, quare triangulum quoq; conſtabit.

Problema. Sit circulus A B E, cuius diameter A E, protracta ſit in infinitum ad partes E, datumque ſit in peripheria punctum C; aptanda ſit quædam recta, vt B F, quæ tranſeundo per C; ipſa linea data B F, ſit intercepta inter peripheriam, hoc eſt, inter peripheriæ concauum, & protractam diametrum A E.

Poriſma. Beneficio igitur Lineæ ad poſtremum genus Medicearum pertinentium, ſi fiat conſtructio &c. pag. 61

Problema. Sit circulus A B E, cuius diameter A E, protracta ſit in infinitum ad partes E, datumque ſit in peripheria punctum B, aptanda ſit inter diametrum productum, & conuexum peripheriæ datæ quædam C F, quæ protracta ad partes C, perueniat ad datum punctum B.

Poriſma. Beneficio igitur lineæ ad poſtremum genus pertinentium. pag. 62

Appendix de Maximis, & Minimis.

Hoc argumentum accutè tractatum fuit ab Apollonio, & à Franciſco Maurolyco. pag. 63

Propoſitio I. Maximum rectangulum contentum ſub duabus ſegmentis propoſiti lateris, reperire.

Poriſma. Rectangulum maximum eſt ſub ſegmentis dati lateris, cum ſegmenta ſunt inter ſe æqualia.

Propoſitio II. Reperire maximum ſolidum, quod fieri poſſit ſub ſegmentis propoſitæ rectæ lineæ.

Poriſma Maximum ſolidum, quod applicatur lineæ cubo deficiens, eſt illud, quod tertiæ parti propoſitæ lineæ applicatur, & cubus adiacet duabus tertijs partibus datæ rectæ lineæ.

Propoſitio III. Reperire maximum, quod applicari poſſit dato plano deficiens ſolido ſimile dato, ſolidumq; datum, cui debet aſſimilari defectus, ſit cubus. p. 64

Poriſma. Maximum ſolidum, quod poteſt applicari dato plano deficiens cubo eſt illud, quod applicatur duabus tertijs partibus dati plani

Propoſitio IV. Reperire maximum plano-planum, quod poſſit applicari datæ lineæ deficiens plano-plano ſimili dato, atque datum, cui debeat aſſimilari defectus, ſit quadrato quadratum.

Poriſma. Maximum plano planum, quod applicatur datæ lineæ deficiens quadrato-quadrato eſt id, quod applicatur quartæ parti datæ lineæ, & quadrato-quadratum, quod deficit, occupat tres quartas partes datæ lineæ. pag. 65

Propoſitio V. Reperire maximum plano planum, quod poſſit applicari dato plano, cum defectu plano-plani ſimilis datæ, & datum, cui debeat aſſimilari defectus, ſit quadrato quadratum.

Poriſma. Maximum plano planum, quod applicatur dato plano, deficiens quadrato quadrato, eſt id, quod applicatur duabus partibus ex quatuor, in quas diuiditur planum, vt quadrato-quad. quod deficit, occupat reliquas duas partes. p 66

Propoſitio VI. Reperire maximum plano-planum, quod poſſit applicari dato ſolido cum defectu plano-plani, ſimilis dato, & datum, cui debet aſſimilari defectus, ſit quadrato quadratum.

Poriſma Maximum plano-planum, quod applicatur dato ſolido, deficient quadrato-quadrato, eſt illud, quod applicatur tribus ex quatuor partibus dati ſolidi, vt quadrato quadratum deficiens reliquam quartam occupat partem.

Propoſitio VII. Reperire maximum plano-ſolidum, quod applicari poſſit datæ lineæ deficiens quadrato-cubo.

Poriſma Maximum plano ſolidum, quod applicatur datæ lineæ deficiens quadrato-cubo, eſt id, quod applicatur quintæ parti datæ lineæ, & quadrato cubus, qui deficit, occupat reliquas quatuor ex quinque partibus propoſitæ lineæ. p. 67

Propoſitio VIII. Reperire maximum plano ſolidum quod poſſit applicari dato plano deficient quadrato cubo.

Poriſma. Maximum plano-ſolidum, quod applicatur dato plano deficiens quadrato-cubo, eſt id, quod applicatur duabus ex quinque partibus dati plani, & quadrato-cubus, qui applicatum deficit, occupat tres reliquas partes eiuſdem plani.

Propoſitio IX. Reperire maximum plano-ſolidum, quod poſſit applicari dato ſolido, deficiens quadrato cubo.

Poriſma. Maximū plano ſolidū, quod applicatur dato ſolido deficiens quadrato-cubo eſt id, quod applicatur tribus ex quinque partibus dati ſolidi, & quadrato-cubus, qui ſolidum applicatum deficit, reliquas duas occupat partes. pag 68

Propoſitio X. Reperire maximum plano ſolidum, quod poſſit applicari dato plano plano deficiens quadrato-cubo.

Poriſma. Maximum plano-ſolidum, quod applicatur dato plano plano deficiens quadrato-cubo, eſt id quod applicatur quatuor ex quinque partibus, dato plano-plani, & quadrato-cubus, quo plano-planum applicatum deficit, reliquam quintam occupat partem.

Propoſitio XI. Maximum rectangulū reperire, quod ſub media & differentia trium proportionalium, comprehenditur.

Poriſma. Quæſitum ſegmentum eſt quod poteſt dimidium quadrati ipſius &c. pag. 69

Propoſitio XII. A data circuli peripheria arcum abſcindere, itaut rectangulū ſub eius chorda in ſaggittā ſit maiorū

Poriſma. Diuidatur diameter in quatuor partes &c. pag. 70

Reſolutio. pag. 72

Compoſitio. pag. 73

Lemma. Si duo triangula habuerint latus, lateri æquale, alter autem adiacētiū angulorum in vno, ſit æqualis alteri adiacentium in altero, reliquus adiacentium in primo, ſit maior reliquo adiacentium in ſecundo, etiam latus maiori angulo oppoſitum, maius erit latere, quod minori angulo opponitur. pag. 72

Reſolutio.

Compoſitio.

Propoſitio XIII. Reperire maximum rectangulum, comprehenſum ſub media, & maiori extrema trium proportionalium. pag. 74

Poriſma. Maior extrema è tribus proportionalibus, debet eſſe æqualis tribus quartis partibus aggregati extremarum, ſi rectangulum ſub maiori extrema, & media, debet eſſe maximum. pag. 75

Propoſitio XIV. Reperire maximum rectangulum comprehenſum ſub media, & differentia extremarum, trium proportionalium.

Poriſma. Dimidium differentiæ extremarum, æquatur ei, quod poteſt dimidiū quadrati ex dimidio aggregati earundem extrema ū quando rectangulum ſub media, & differentia extremarum eſt omniū maximum &c.

Propoſitio XV. Datum latus diuidere in duo ſegmenta, vt ex ijs quadratorum aggregatum, ſit omnium minimū pag. 76

Poriſma. Latus diuidendum eſt duplū partis quæſitæ quocirca &c.

Corollarium. Ex his facile intellegis, minimum aggregatum quadratorum à partibus lineæ diuiſæ duplum eſſe maximi rectāguli ſub partibus eiuſdem lineæ.

Propoſitio XVI. Si parabolen recta linea contingat &c.

Poriſma. In omni parabole recta linea contingens cōueniens cum diametro extra ſectionem, quæ à tactu ad diametrum ordinatim applicatur, abſcindet ex diametro ad verticem ſectionis lineā æqualem ei, quæ inter ipſam, & contingentem interijcitur, & in locum, qui eſt inter cōtingentem, & ſectionem, alia recta linea non cadet &c.

Propoſitio XVII. Si hyperbolen, vel ellipſin, vel circuli circumferentiam p. 77

Poriſma. In omni circulo, vt eſt differentia ſegmentorum diametri, ad ſegmentum maius, ita duplum ſegmentum minus, ad interceptam inter ordinatim ductam, à qua diametri ſegmenta ipſa deſignantur, & punctum occurrens ipſius tangentis cum diametro producta.

Prop XVIII. Ad ellipſin quod attinet &c.

Poriſma. In omni ellipſi, vt eſt differentia ſegmentorum diametri, ad ſegmētum maius, ita duplum ſegmētum minus, ad interceptum, inter ordinatum ductam à qua ſegmenta ipſa deſignantur, & punctum occurſus ipſius tangentis, cum diametro producta. pag. 79

Definitiones.

Lemma primum.

Lemma ſecundum. pag. 80

Lemma tertium.

Lemma quartum. pag. 81

Lemma quintum.

Theorema primum. Productum in aliqua recta linea factum ſecundum poſitos terminos æqualea maximum eſt omnium ſimilium productorum, quæ fieri poſſunt à binis lineæ datæ ſegmentis tanquam ex radicibus. pag. 81

Theorema ſecundum, Si duæ rectæ lineæ ſegmenta fuerint, &c.

Theorema tertium. Data recta linea, & duobus terminus, &c. pag. 82

Scholion.

Corollarium.

Problema primum. Datam lineam rectam ita ſecare, vt productum ex dignitatibus ſegmentorum ſit omnium ſimilium maximum. pag 83

Problema ſecundum. Æquationem determinare in qua poteſtas quæſitæ radicis negatur de homogeneo ſub radice data, & dignitate ſua parodica, &c. p 84.

Lemma ſecundum, pag. 85

Epiſtula ad Franciſcum Marium Naldioum. pag. 87

Theorema. Si ſit circulus cuius diameter A D, &c.

Reſolutio.

Compoſitio.

F I N I S.

A01 146 1656

Digitized by Google

Digitized by Google